3647 Bibl. Mont

Grundlehren

der

Algebra, höhern Geometrie

und

Infinitesimalrechnung,

zur

Erleichterung dieses Studiums

faßlich vorgetragen

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Baier. Schulrath, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik, auch Professor an dem Forstlehrinstitute ꝛc.

Mit vierzehn Kupfertafeln.

Giesen,

bey Georg Friedrich Tasché,

1817.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Excellenz,

dem

Hochgebornen Herrn

Maximilian Joseph, Grafen v. Montgelas,

Seiner Königl. Majestät von Baiern ersten und dirigirenden Staats- und Conferenz-Minister der auswärtigen Angelegenheiten, der Finanzen und des Innern, Großkreuz und Großkanzler der Königl. Orden vom heil. Hubert und der Baierischen Krone, Großkreuz der französischen Ehrenlegion, Großkreuz des Kais. Russischen Alexander Newsky-Ordens, Großkreuz des K. Ungarischen St. Stephans-Ordens, Großkreuz des K. Sächsischen Kron-Ordens, Ehren-Großkreuz des Johanniter-Ordens ꝛc.

als

schwaches Denkmal der tiefsten Verehrung

ehrfurchtsvoll gewidmet,

vom

Verfasser.

Hochgeborner Graf!
Hochgebietender dirigirender Minister,
Gnädiger Herr!

Ihro Excellenz sind nicht nur tiefer Kenner, sondern auch thätiger Beschützer und Beförderer der Wissenschaften.

Keine wissenschaftliche Lehre wirkt aber so wohlthätig auf die Bildung des Verstandes, keine ist so reichhaltig in ihren Anwendungen, als die Mathesis.

Daher nehme ich mir die Freyheit, Ihro Excellenz das nachfolgende Werk, welches einen der interessantesten Theile der mathematischen Wissenschaft für Anfänger bearbeitet, in Unterthänigkeit zu widmen.

Mögte diese Schrift das Glück genießen, Ihro Excellenz höchst schätzbaren Beyfall einigermaßen zu verdienen!

Mit innigster Verehrung habe ich die Gnade mich zu nennen

Ihro Excellenz

unterthänig = gehorsamsten

Hoffmann.

Vorerinnerung.

Es ist Pflicht des öffentlichen Lehrers, sich die Verbreitung seiner Berufswissenschaften möglichst angelegen seyn zu lassen. Dieser Zweck kann durch Gründlichkeit und Klarheit des mündlichen Vortrags, und durch zweckmäßige Lehrbücher erreicht werden. Beydes scheint in keiner Wissenschaft mehr erforderlich, als in der Mathematik. Denn eben diese ist, nach dem Wahne vieler Unkundigen oder Halbwisser, eine trockne, den Verstand

ermüdende, Lehre. Nun braucht man wohl den etwas Eingeweihten diesen Irrthum nicht zu benehmen, da sie sich selbst schon vom Gegentheile überzeugt haben. Aber für solche, die der Wissenschaft erst gewonnen werden sollen, kann die Deutlichkeit des Vortrags nicht zu weit getrieben werden. Diesen soll man die ersten Elemente so faßlich und anziehend darstellen, daß ihnen eine Wissenschaft werth und erfreulich werden muß, von deren Studium sie meist durch abschreckende Vorurtheile zurückgehalten worden sind. Ist es dem Lehrer nur einmal gelungen, die Theilnahme des Schülers zu wecken, so wird es nicht schwer, das wissenschaftliche Fünkchen ferner zu nähren und zum belebenden Feuer anzufachen. Daß die Mathematik, die evidenteste aller Wissenschaften, noch nicht allgemein mit dem besten Erfolge gelehrt wird, rührt von der, oft fehlerhaften Methode her. Aber doch ist die Bahn schon gebrochen. Mit der besten Wirkung betrachten sachkundige Lehrer die Mathesis nicht blos als Mit-

tel, um eigentliche Mathematiker zu erziehen, sondern als allgemeines Bildungsmittel des jugendlichen Geistes; als die wirksamste Geistes-Gymnastik. Diesen wichtigen Zweck im höchsten Grade zu erreichen, ist das Hauptziel ihres öffentlichen Unterrichtes. Das vorzügliche Talent schwingt sich dann aus eigener Kraft über das Elementare hinaus, und wandelt in den höhern Regionen mit Lust und Freyheit umher.

Aus diesen Betrachtungen, welche ein mehr als zwölfjähriger öffentlicher Lehrvortrag erzeugte und bewährte, giengen Plan und Ausführung der nachfolgenden Schrift hervor.

Elementar-Arithmetik und Geometrie, nebst Trigonometrie, sind die Lehrgegenstände, welche auf vielen Gymnasien und Lyceen (auch hin und wieder noch auf Universitäten) den öffentlichen Unterricht der Größenlehre beschränken. Bisweilen wird etwa noch die Buchstabenrechnung zu eini-

gen Begriffen von der Algebra, und die Geometrie zur nothdürftigen Kenntniß von den Kegelschnitten erweitert. Von einer kurzen und faßlichen Anleitung zur Infinitesimal-Rechnung ist hier meist gar keine Rede.

Der Verfasser dachte sich Schüler, welche, mit den Grundlehren der Arithmetik und Geometrie (einschließlich der Trigonometrie) vertraut, zur Erweiterung ihrer Kenntnisse, eine brauchbare Anleitung wünschen, um auch das übrige Elementar-Gebiet der reinen Mathematik zu durchwandern. Zu diesem zweyten Cursus ihres mathematischen Studiums soll ihnen nachfolgendes Buch, als bequemer Leitfaden, dienen. Neues (im strengen Sinne des Wortes) wird der sachkundige Leser wenig darin finden; allein, nach des Verfassers Ueberzeugung, kommt es bey Elementar-Schriften ganz vorzüglich auf die Art des Vortrags an. Doch werden dem aufmerksam prüfenden Kenner manche Eigenthümlichkeiten in der

Darstellung nicht entgehen. Sein Hauptzweck war stets, den Schüler auf die möglichst anziehende Weise, ohne der Gründlichkeit etwas zu vergeben, durch das Elementar-Gebiet der Algebra, höhern Geometrie, und der Infinitesimal-Rechnung zu geleiten. Von dieser erhabenen Stelle mag er sodann, mit heiterm Blicke, den zurückgelegten Weg übersehen; entweder um seinen mathematischen Cyclus nun abzuschließen, oder, nach Kraft und Wunsch, seine Thätigkeit auf neue Gegenstände zu lenken.

Soviel von dem Plane der Schrift im Allgemeinen. Nun Einiges von der besondern Ausführung desselben.

Die Elemente der **Algebra** beginnen mit der Lehre von entgegengesetzten Größen und mit der Buchstabenrechnung, weil diese, zum algebraischen Gebrauche höchst nöthige Vorbereitung, öfters nicht mit gehöriger Faßlichkeit vorgetragen

wird. In der Algebra selbst sind alle Lehren mit schicklichen Aufgaben erläutert, damit dem Schüler die Regeln um so einleuchtender und überzeugender werden. Absichtlich ist die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade nicht darin aufgenommen, weil diese, nach der Ansicht des Verfassers, für einen höhern Cursus gehören. Auch wird man in den geometrisch-algebraischen Aufgaben eine angenehme Mannigfaltigkeit nicht vermissen. Sie bereiten gewissermaßen das Nachfolgende vor.

In den Vortrag der höhern Geometrie suchte der Verfasser den höchsten Grad von Faßlichkeit der Darstellung zu bringen. Die Methode, zuerst die geometrische Entstehung einer Curve zu zeigen, sodann eine Gleichung für sie aufzufinden, und endlich aus dieser Gleichung wieder die fernern Eigenschaften jener Curve analytisch abzuleiten, hat sich hier als die zweckmäßigste bewährt. Außer der geraden Linie und den

gewöhnlichen Kegelschnitten wurden, zur größern Mannigfaltigkeit, noch einige krumme Linien von höhern Ordnungen betrachtet.

Was nun die Infinitesimal-Rechnung betrift, so muß sich der Verfasser erklären, warum (§. 286.) das Differential eine Größe genannt wird, welche gegen eine gegebene endliche Größe unendlich klein, und aus der Natur derselben abgeleitet ist. Da es, nach dem Ausspruche der Sachverständigen, noch immer keine solche Begründung der Differentialrechnung giebt, welche in Hinsicht ihrer Faßlichkeit den Elementarlehren der Geometrie gleichgestellt werden könnte, so wird man es nicht übel deuten, wenn in nachfolgender Schrift eine Ansicht zum Grunde gelegt ist, welche dem Anfänger, der dieses Gebiet zum erstenmale betritt, am Faßlichsten ist. Alle Regeln zur Differentiation sind ihm klar, wenn er eingesehen hat, daß $d(xy) = xdy + ydx$ ist. Dies folgt aber

daraus, daß $dxdy$ gegen dx oder dy als Null betrachtet und weggelassen werden kann. (§. 290.) Jede andere Methode, die Differentiale zu entwickeln, setzt tiefere mathematische Kenntnisse voraus, als hier geschehen konnte, und, nach dem Plane der Schrift, geschehen durfte. Der Hauptzweck dieser letzen Abtheilung ist, den Schülern die allgemeinsten Regeln und Anwendungen des Infinitesimal-Calculs faßlich vorzutragen. Der Bemühungen, diese Rechnung evident zu begründen, konnte hier keine Erwähnung geschehen. Für angenehme Mannigfaltigkeit der Anwendungen der Differential- und Integral-Rechnung auf arithmetische und geometrische Gegenstände glaubt der Verfasser hinreichend gesorgt zu haben. Auch hier hat er sich immer eines hohen Grades von Deutlichkeit im Vortrage beflissen; eben um zu zeigen, daß auch die ersten Anfänger einige Fortschritte in der Rechnung des Unendlichen machen können, deren bloser Name oft Viele zurückschreckt.

Da die drey eben genannten Hauptheile der Schrift sich in keinem bekannten Elementarwerke, weder auf diese Weise verbunden, noch auf gleiche Art vorgetragen, befinden, so glaubt der Verfasser keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben; hoffet vielmehr, zur Belohnung seiner Bemühungen einigen Dank der Lehrer und Schüler zu verdienen, welche sich derselben bey dem Unterrichte bedienen. Jene ersucht er etwaige Fehler und Irrungen mit Nachsicht zu verbessern; denn mackellos ist keines Menschen Werk. Auch wird es Ihnen leicht seyn, den Vortrag, entweder durch Weglassung einiger Aufgaben, abzukürzen, oder, durch Hinzusetzen von noch mehreren, nach Nothdurft zu erweitern.

Wegen Benennung der einzelnen §§. mit den Worten: Erklärung, Lehrsatz, Aufgabe, u. s. f., wird der Verfasser keinen Vorwurf verdienen; denn immer gewährt es den Anfängern eine bequemere Uebersicht, wenn sie durch diese

Aufschriften erfahren, was sie in jedem §. zu erwarten haben.

Hiermit empfehle ich die Schrift den Verehrern der Mathesis.

Aschaffenburg im September 1816.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Inhaltsverzeichniß.

Erste Abtheilung.
Die Algebra.

Seite.

I. Abschnitt.

Entgegengesetzte Zahlen 1

II. Abschnitt.

Buchstabenrechnung 15

III. Abschnitt.

Einleitung zur Algebra 33

IV. Abschnitt.

Arithmetische Aufgaben 43

A. Bestimmte Aufgaben.

I. Mit einem Unbekannten 43

II. Mit zwey Unbekannten 58

III. Mit drey Unbekannten . . . . —

Seite.
B. Unbestimmte Aufgaben 69
C. Quadratische Aufgaben.
I. Reine quadratische Gleichungen 78
II. Unreine quadratische Gleichungen . . . . . —

V. Abschnitt.
Geometrische Aufgaben 104

Zweyte Abtheilung.

Die höhere Geometrie.

I. Abschnitt.
Einleitung 145

II. Abschnitt.
Die Kegelschnitte 158
I. Die Parabel 158
II. Die Ellipse 167
III. Die Hyperbel 185
IV. Allgemeine Bemerkungen über die Kegelschnitte. 202

III. Abschnitt.
Einige Curven von höheren Ordnungen. . . 209

Seite.
I. Die Cissoide 209
II. Die Conchoide 216
III. Die Spirale 219
IV. Die Cycloide 223

Dritte Abtheilung.

Die Infinitesimalrechnung.

I. Abschnitt.

Grundlehren der Differentialrechnung

I. Einleitung 227
II. Geometrische Aufgaben
1. Von den Tangenten und Subtangenten 237
2. Von den Normalen und Subnormalen 248
III. Vom Größten und Kleinsten
1. Vorbegriffe 253
2. Geometrische Aufgaben vom Größten 255
3. Arithmetische Aufgaben vom Größten 271
4. Geometrische Aufgaben vom Kleinsten 276
5. Arithmetische Aufgaben vom Kleinsten 281
IV. Der binomische Lehrsatz 286

Seite.

II. Abschnitt.

Grundlehren der Integralrechnung . . . 302

I. Einleitung. . . . .

II. Quadratur der Flächen 307

III. Rectification der Curven 322

IV. Cubirung der Körper 330

V. Quadratur der Oberflächen der Körper . . . 337

Erste Abtheilung.
Die Algebra.

Erster Abschnitt.
Entgegengesetzte Zahlen.

§. 1.

Erklärung. Unter entgegengesetzten Größen versteht man Größen von einerley Art, welche in einer solchen Beziehung gegen einander stehen, daß eine die andere vermindert, oder bisweilen ganz aufhebt.

§. 2.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieses Begriffs (§. 1.) denke man sich Vermögen und Schulden; Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen; Hinaufsteigen und Hinabsteigen u. s. w.

§. 3.

Erklärung. Eine von den beyden entgegengesetzten Größen (§. 1.) nennt man die bejahende oder positive die andere aber die verneinende oder negative, und

es ist ganz willkührlich, welche von beyden man als die bejahende, und welche man als die verneinende betrachten will.

§. 4.

Anmerkung. Heißt man das Vermögen (§. 3.) positiv, so sind die Schulden das Negative, und man kann sagen: Schulden sind negatives Vermögen. Aber die Schulden können auch als positiv angenommen werden und dann wird das Vermögen das Negative seyn. Jetzt heißt es: Vermögen sind negative Schulden.

§. 5.

Zusatz. Die negative Größen (§. 3.) sind daher allerdings wirkliche, und nicht etwa blos eingebildete, Größen. Denn jede der beyden entgegengesetzten Größen kann als die negative angesehen werden. Ihre Wesenheit besteht einzig darin, daß sie mit den positiven Größen einen Gegensatz bilden.

§. 6.

Willkührlicher Satz. Da die entgegengesetzten Grössen eine sich gegenseitig zerstörende Beschaffenheit haben (§. 1.) so werden sie am Schicklichsten mit den Zeichen + und — dargestellt; indem sich diese auf Rechnungsarten beziehen, welche sich wechselseitig entgegengesetzt sind. Die positiven Grössen erhalten das Zeichen +, die negativen aber — . Steht vor einer Größe kein Zeichen, so versteht man + darunter.

§. 7.

Grundsätze. I. Gleiche entgegengesetzte Größen zusammengenommen, heben sich vollkommen auf und werden $= 0$.

So ist $+ 8 - 8 = 0$; $+ 12 - 12 = 0$; $+ 26 - 26 = 0$; u. s. w.

(Erläuterung an obigen (§. 2.) Beyspielen.)

II. Von ungleichen entgegengesetzten Größen, die zusammenkommen, hebt die kleinere, so viel als sie selbst beträgt, in der größeren auf, und der Überschuß ist positiv oder negativ, je nachdem die größere positiv oder negativ war.

Z. B. $+15-9=+6$; $+28-15=+13$; $+12-11=+1$; u. s. f. ferner: $-10+7=-3$; $-30+24=-6$; $-9+8=-1$; u. s. w.

(Erläuterung an obigen (§. 2.) Beysp.)

III. Werden mehrere Größen von einerley Zeichen unter sich zusammengesetzt, so geben alle positive eine positive, alle negative eine negative Summe.

Z. B. $+8+4+10+6=+28$ und $-7-5-10-18=-40$; u. s. f.

§. 8.

Anmerkung. Da sich die Mengen aller nur denkbaren Größen durch Zahlen darstellen lassen, so kann man die Rechnungsregeln mit entgegengesetzten Größen am Faßlichsten in entgegengesetzten Zahlen entwickeln.

§. 9.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen zu addiren.

Auflösung. I. Man addire alle gegebene positive und alle negative Zahlen (§. 7. I.);

II. Sind beide Summen gleich, so heben sie sich auf (§. 7. I.): sind sie ungleich, so ziehe man die kleinere von der größern ab, und setze dem Unterschiede das Zeichen der größeren vor. (§. 7. II.)

Andere Auflösung. Man schreibe die gegebenen Zahlen paarweise unter einander und befolge bey jedem Paare die Regeln in §. 7. I. und II.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösungen beruht unmittelbar auf den in ihnen angeführten Paragraphen, und bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Beispiele. I. $+7+4-8+12-9+6-20+5-3=+7+4+12+6+5-8-9-20-3=+34-40=-6.$

II. $\left.\begin{array}{rrrrr} +8 & -12 & -14 & +7 & -3 \\ -9 & +10 & -3 & -7 & +12 \end{array}\right\}$ zu addiren.

$-1 \quad -2 \quad -17 \quad 0 \quad +9$ Summe.

§. 10.

Anmerkung. Das erste Beyspiel (in §. 9.) könnte auch dergestalt berechnet werden, daß man sagte: $+7$ und $+4$ giebt $+11$, dazu -8 giebt $+3$, dazu $+12$ giebt $+15$. u. s. w.

Im zweyten Beyspiele könnte man auch sagen:

$$\begin{array}{rrrrrl} +8 & -12 & -14 & +7 & -3 & =-14 \\ -9 & +10 & -3 & -7 & +12 & =+3 \text{ folglich ist:} \\ \hline -1 & -2 & -17 & 0 & +9 & =-11=-14+3. \end{array}$$

§. 11.

Lehrsatz. Eine positive Zahl abziehen, heißt eine ihr gleiche negative addiren.

Erster Beweis. Durch das Abziehen der positiven Zahl wird die Größe, wovon der Abzug geschehen soll, um so viele Einheiten vermindert, als die abzuziehende enthält. Da nun eben dieses auch durch das Addiren der ihr gleichen negativen geschieht, so ist Jenes mit diesem einerley.

Anderer Beweis. $(+10)-(+6)=(+10-6+6)-(+6)=+10-6=+4.$ Desgleichen $(-12)-(+7)=(-12-7+7)-(+7)=-12-7=-19.$

§. 12.

Lehrsatz. Eine negative Zahl abziehen heißt die ihr gleiche positive abdiren.

Beweis. Da die negative Zahl in Bezug auf die positive einen Mangel ausdrückt, und abziehen soviel heißt, als wegnehmen, so ist die Subtraction der negativen Zahl nichts anders, als die Wegnahme des Mangels. Wer aber den Mangel hinwegnimmt, muß etwas wirklich Vorhandenes setzen.

Anderer Beweis. $+15-(-8)=(+15+8-8)-(-8)=+15+8=+23$,

Ferner. $(-7)-(-12)=(-7+12-12)-(-12)=-7+12=+5$.

§. 13.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung. Nachdem man in der abzuziehenden Größe alle Zeichen in die entgegengesetzte verwandelt hat, addire man (§. 9.) die zwey gegebenen Zahlen zusammen, so ist die Subtraction verrichtet.

Beweis. Die abzuziehende Zahl ist entweder eine positive, oder eine negative, folglich wird in jedem Falle (nach §. 11. und 12.) die ihr gleiche engegengesetzte addirt, um den Unterschied zu finden.

Beyspiel. I.

$$\begin{array}{rrrrrr} +8 & -15 & -12 & +9 & -5 & +7 \\ +6 & -4 & +9 & -12 & +20 & -5 \\ - & + & - & + & - & + \\ \hline +2 & -11 & -21 & +21 & -25 & +12. \end{array}$$

II. $-4+1-5-10-8+6-3$
$-9-8-15+7-9+13-8+6$
$+\;+\;+\;-\;+\;-\;+\;-$

$+5+9+10-17+1-7+5-6.$

§. 14.

Anmerkung. Eine Probe über die Subtraction besteht darin, daß man sowohl die abzuziehende Zahl, als auch jene wovon der Abzug geschehen soll (nach §. 10.) reducirt und die hierdurch erhaltenen zwey Zahlen von einander subtrahirt, wo die Differenz der (nach §. 13.) gefundenen gleich seyn wird. z. B.

$$\left.\begin{array}{l} +7-8-3-5+6=-3 \\ +9+4-6+12-3=+16 \\ -\;-\;+\;-\;+\;\;\;- \end{array}\right\}\text{folglich}$$

$$-2-12+3-17+9=-19.$$

§. 15.

Lehrsatz. In der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlen ist es einerley, ob die Einheit positiv oder negativ angenommen wird; allein sie muß entweder auf die erste oder auf die andere Art festgesetzt werden.

Beweis. Nimmt man die Einheit positiv an, so sind die positiven Zahlen Mengen dieser positiven Einheit und die negativen Zahlen Mengen ihres Entgegengesetzten. Gerade eben so, nur umgekehrt, ist es, wenn man die Einheit negativ annimmt. Da nun die negativen Zahlen, gleich den positiven, reelle Größen sind, so ist es einerley, welches von beyden man annimmt. Weil es aber widersprechend wäre, die Einheit zugleich positiv und negativ, oder willkührlich bald positiv, bald negativ zu setzen, so muß hierüber etwas Bestimmtes zum Grunde gelegt werden.

§. 16.

Anmerkung. Durch allgemeine Übereinkunft wird die Einheit als positiv angenommen.

§. 17.

Lehrsatz. Zwey positive Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Multipliciren heißt, den Multiplicanden so oft nehmen, als der Multiplicator die Einheit enthält. Ist nun dieser Multiplicator positiv, so enthält er die positive Einheit (§. 16.) selbst mehrmalen, folglich ist auch der Multiplicand selbst, und nicht sein Entgegengesetztes, im Producte enthalten, d. h. das Product muß positiv seyn.

Beyspiele. $+8 \times +6 = +48$; $+12 \times +7 = +84$; $+100 \times +10 = +1000$; u. s. w.

Anderer Beweis. Da sich die positive Größe zur negativen verhält, wie die Bejahung zur Verneinung, so heißt die Multiplication zweyer positiven Größen nichts anders, als die Bejahung bejahen, welches offenbar ein bejahtes, d. h. ein positives Resultat geben muß.

§. 18.

Lehrsatz. Zwey negative Factoren geben ein positives Product.

Beweis. Der Multiplicand kömmt so oft in das Product, wie oft die Einheit in dem Multiplicator enthalten ist. Nun enthält aber der negative Multiplicator die (positive) Einheit nicht selbst, sondern ihr Entgegengesetztes. Folglich kömmt auch hier der negative Multiplicand nicht selbst, sondern dessen Entgegengesetztes in das Product, d. h. das Product wird positiv.

Beyspiele. $-5 \times -4 = +20$; $-18 \times -6 = +108$; $-40 \times -50 = +2000$; u. s. w.

Anderer Beweis. Da negative Größen Verneinungen ausdrücken, so heißt ein Product aus zwey negativen Factoren soviel, als die Verneinung verneinen, welches eine Bejahung d. h. etwas Positives hervorbringt.

§. 19.

Lehrsatz. Eine positiver Multiplicand und ein negativer Multiplicator geben ein negatives Product.

Beweis. Hier wird der positive Multiplicand so oft genommen, als der negative Multiplicator die Einheit enthält. Nun ist aber die (positive) Einheit nicht selbst in diesem (negativen) Multiplicator enthalten, sondern ihr Entgegengesetztes. Daher kömmt auch der positive Multiplicand nicht selbst in das Product, sondern sein Entgegengesetztes, und dies Product muß negativ seyn.

Beyspiele. $+7 \times -10 = -70$; $+12 \times -4 = -48$; $+12 \times -12 = -144$; u. s. f.

Anderer Beweis. Einen positiven Multiplicanden mit einem negativen Multiplicator multipliciren, heißt soviel, als die Bejahung verneinen, welches nothwendiger Weise eine Verneinung, d. h. etwas Negatives hervorbringt.

§. 20.

Lehrsatz. Ein negativer Multiplicand und ein positiver Multiplicator geben ein negatives Product.

Beweis. Da hier der negative Multiplicand so oft in das Product kömmt, wie oft die Einheit in dem Multiplicator enthalten ist, diese Einheit aber, als eine positive, selbst in dem Multiplicator steckt, so muß auch der negative Multiplicand

selbst in das Product kommen, und dieses Produkt muß negativ seyn.

Beyspiele. $-8 \times +5 = -40$; $-15 \times +100 = -1500$; $-3 \times +19 = -57$; u. s. w.

Anderer Beweis. Das Negative mit dem Positiven multipliciren, heißt soviel, als die Verneinung bejahen, welches allerdings eine Verneinung, d. h. etwas Negatives hervorbringen muß.

§. 21.

Zusatz. Aus dem Bisherigen (§. 17 — §. 20.) folgt die Richtigkeit nachstehender Regel für die Bestimmung der Zeichen des Products: Wenn die Factoren einerley Zeichen haben, so wird das Product positiv; haben sie aber entgegengesetzte Zeichen, so ist das Product negativ.

§. 22.

Aufgabe. Entgegengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. I. Man setze zuerst den Multiplicanden, unter ihn den Multiplicator und ziehe einen Absonderungsstrich.

II. Man multiplicire mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators nach und nach jedes einzelne Glied des Multiplicanden und befolge die (§. 21.) bewiesene Regel für die Zeichen.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung ergiebt sich theils aus dem Begriffe der Multiplication, theils aus den oben (§. 17 — §. 20.) bewiesenen Sätzen.

Beyspiele.

I. $- 3 + 5 - 6 - 10 + 2$ Multiplicand
$- 4 + 3$ Multiplicator

$$\left.\begin{array}{l} + 12 - 20 + 24 + 40 - 8 \\ - 9 + 15 - 18 - 30 + 6 \end{array}\right\} \text{Product.}$$

II. $$\left.\begin{array}{l} + 7 - 3 - 5 - 10 + 8 \\ - 4 + 6 - 7 - 3 \end{array}\right\} \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{l} - 28 + 12 + 20 + 40 - 32 \\ + 42 - 18 - 30 - 60 + 48 \\ - 49 + 21 + 35 + 70 - 56 \\ - 21 + 9 + 15 + 30 - 24 \end{array}\right\} \text{Product.}$$

§. 23.

Anmerkung. Eine Probe über die Multplication besteht darin, daß man beyde Factoren (nach §. 10.) auf eine Zahl reducirt und miteinander multiplicirt. Dieses Product muß dann derjenigen Zahl gleich seyn, welche man aus der Reduction aller Glieder des Products erhält; z. B.

Multiplicand $+ 5 - 8 + 3 - 7 = - 7.$
Multiplicator $- 6 + 9 \qquad = + 3.$

Product. $$\left\{\begin{array}{l} - 30 + 48 - 18 + 42 \\ + 45 - 72 + 27 - 63 \end{array}\right\} = - 21.$$

Denn das Product ist $= + 48 + 42 + 45 + 27 - 30 - 18 - 72 - 63 = 162 - 183 = - 21.$

§. 24.

Lehrsatz. Ein positiver Dividend und ein positiver Divisor geben einen positiven Quotienten.

Beweis. Nach dem Begriffe von der Division ist die Einheit so oft in dem Quotienten enthalten, als der Divisor

in dem Dividenden. Ist nun Dividend und Divisor positiv, so ist dieser wirklich ein Theil von jenem, folglich muß auch die (positive) Einheit selbst einen Theil des Quotienten bilden, d. h. der Quotient muß positiv seyn.

Beyspiele. $+ 144 : + 24 = + 6$; $+ 48 : + 8 = + 6$; $+ 7 : + 11 = + \frac{7}{11}$; u. s. f.

Anderer Beweis. Wenn ein positiver Dividend und ein positiver Divisor keinen positiven Quotienten gäben, so müßte dieser negativ seyn. Wäre er aber negativ, so müßte (nach der bekannten Divisionsprobe) der positive Divisor mit dem negativen Quotienten multiplicirt, einen positiven Dividenden geben, welches jedoch (nach §. 21.) unmöglich ist. Folglich ist der Quotient positiv.

§. 25.

Lehrsatz. Aus einem negativen Dividenden und einem negativen Divisor entspringt ein positiver Quotient.

Beweis. Da hier der negative Divisor selbst in dem negativen Dividenden enthalten ist, so muß auch die (als positiv angenommene) Einheit selbst in dem Quotienten enthalten, d. h. dieser Quotient muß positiv seyn.

Beyspiele. $- 72 : - 9 = + 8$; $- 1000 : - 10 = + 100$; $- 3 : - 7 = + \frac{3}{7}$; u. s. f.

Anderer Beweis. Entstände aus einem negativen Dividenden und einem negativen Divisor kein positiver Quotient, so müßte er negativ seyn. Wäre er aber negativ, so müßte dieser negative Quotient mit dem negativen Divisor multiplicirt, einen negativen Dividenden geben, welches (nach §. 21.) unmöglich ist. Also muß der Quotient positiv seyn.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn der Dividend positiv und der Divisor negativ ist, so wird der Quotient negativ.

Beweis. Weil in diesem Falle der negative Divisor nicht selbst in dem positiven Dividenden enthalten ist, sondern dessen Entgegengesetztes, so kömmt auch hier die (positive) Einheit nicht selbst, sondern ihr Entgegengesetztes in den Quotienten, und dieser Quotient muß negativ werden.

Beyspiele. $+ 20 : - 5 = - 4$; $+ 60 : - 12 = - 5$; $+ 7 : - 10 = - \frac{7}{10}$; u. s. w.

Anderer Beweis. Sollte der hier entstehende Quotient nicht negativ seyn, so müßte er positiv werden. Wäre er aber positiv, so müßte er, mit einem negativen Divisor multiplicirt, ein positives Product (den positiven Dividenden) geben, welches (§. 21.) widerspricht. Also ist der Quotient negativ.

§. 27.

Lehrsatz. Ein negativer Dividend und ein positiver Divisor geben einen negativen Quotienten.

Beweis. Da hier der negative Dividend den positiven Divisor nicht selbst enthalten kann, sondern sein Entgegengesetztes, so kann auch in dem Quotienten die (positive) Einheit nicht selbst, sondern es muß ihr Entgegengesetztes darin enthalten seyn, d. h. der Quotient muß negativ werden.

Beyspiele. $- 21 : + 7 = - 3$; $- 36 : + 18 = - 2$; $- 8 : + 13 = - \frac{8}{13}$; u. s. w.

Anderer Beweis. Sollte ein negativer Dividend und ein positiver Divisor keinen negativen Quotienten geben, so müßte er positiv seyn, und es würde das Product aus dem positiven Quotienten und dem positiven Divisor den negativen Dividenden hervorbringen; welches (nach §. 21.) unmöglich ist. Folglich muß der Quotient negativ seyn.

§. 28.

Anmerkung. Aus den bisher erwiesenen Sätzen (§. 24 — §. 27.) folgt die Richtigkeit der nachstehenden Regel für die Division: Wenn Dividend und Divisor gleiche Zeichen, haben, so wird der Quotient positiv, haben sie aber entgegengesetzte, so wird der Quotient negativ.

§. 29.

Aufgabe. In entgegengesetzten Zahlen die Division zu verrichten.

Auflösung. Man dividire mit den Ziffern des Divisors auf die gewöhnliche Weise in jene des Dividenden und bestimme sodann die Zeichen der Quotienten (nach §. 28.)

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruhet theils auf den gewöhnlichen Regeln der Division, theils auf der bewiesenen Regel (§. 28.)

Beyspiele. I.

Divis. Dividend Quotient

$-4 \mid -12+20-48-60+36\,(+3-5+12+15-9)$

II.

$$\frac{-18+12-6}{-3} = +6-4+2.$$

III.

Divis. Dividend Quotient

$+5 \mid -20-60+3-100-2\,(-4-12+\tfrac{3}{5}-20-\tfrac{2}{5})$

IV.

Divisor	Dividend	Quotient
$-3+2$	$+12-21-36-8+14+24$	$-4+7+12$

$$
\begin{array}{l}
+12 \qquad -8 \\
\hline
-21-36+14+24 \\
-21 \qquad +14 \\
\hline
-36+24 \\
-36+24 \\
\hline
0 \quad 0
\end{array}
$$

§. 30.

Zusatz. Auch über die Division läßt sich eine Probe anstellen, welche der oben (§. 23.) angeführten ähnlich ist. Wenn man nämlich den reducirten Divisor in den reducirten Dividenden dividirt, so muß der reducirte Quotient hieraus hervorgehen. Z. B. diene das

IV. Beyspiel des vorhergehenden §. Hier ist der Divisor $= -3+2 = -1$, der Dividend $= +12-21-36-8+14+24 = +12+14+24-21-36-8 = +50-65 = -15$, und der Quotient $= -4+7+12 = +15$. Wirklich ist aber auch $\frac{-15}{-1} = +15$.

Zweyter Abschnitt.

Buchstabenrechnung.

§. 31.

Erklärung. Die Buchstabenrechnung ist jener Theil der Arithmetik, welcher sich, statt der Ziffer, der Buchstaben bedient.

§. 32.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Erklärung bemerke man Folgendes. Die gewöhnliche Arithmetik rechnet mit Ziffern, d. h. mit einzelnen, durch das Decimalzahlengesetz bestimmten Mengen von Einheiten. Die Zifferrechnung kann sich daher in ihren Anwendungen nicht über diese einzelne Fälle erheben, d. h. sie kann als solche keine allgemeine Resultate geben. Da es nun in der ganzen Größenlehre äusserst wichtig ist, dergleichen allgemeine Gesetze aufzufinden, welche, als Regeln, eine oft unendliche Menge von besonderen Fällen unter sich begreifen, so war es ein großes Bedürfniß für die Ausbildung der Mathematik, anstatt der besondern (Zahlen-) Rechenkunst eine allgemeine (Buchstaben-) Arithmetik zu entwerfen. Wie dieses möglich sey, und was diese allgemeine Rechenkunst leiste, wird die Folge lehren.

§. 33.

Willkührlicher Satz. Man wähle anstatt der Zifferschrift der gewöhnlichen Arithmetik eine Buchstabenschrift, d. h. man lasse die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c, d u. s. f. Zahlen überhaupt bedeuten, die nicht, wie die Ziffer, ihren Werth von ihrer Stelle ha-

ben, sondern deren Werth theils von den Bedingungen der Aufgabe, theils von der Willkühr des Rechnenden abhängt. Werden nun dergleichen Buchstaben durch die arithmetischen Zeichen gehörig verbunden, so entspringen daraus Ausdrücke in Buchstaben (Formeln), welche als allgemeine Regeln für eine unendliche Menge von einzelnen Fällen gelten, wenn man, statt der Buchstaben in ihnen, bestimmte Zahlen setzt.

§. 34.

Zusätze. I. Da man sich unter a irgend eine positive Zahl vorstellen kann, und unter b jede andere positive, welche von a verschieden ist, so wird $a + b$ der allgemeine Ausdruck einer jeden Summe seyn, welche aus zwey positiven Zahlen besteht.

II. Auf gleiche Weise stellt $a - b$ jede Differenz zweyer positiven Größen dar.

III. Auch drückt $a \times b$ (wofür man auch $a.b.$ oder blos ab setzt) jedes Factum aus zwey positiven Factoren aus.

IV. Endlich stellt $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ einen jeden Quotienten oder jeden Bruch im Allgemeinen dar.

§. 35.

Erklärung. Unter dem Coefficienten eines Buchstaben versteht man diejenige Ziffer, welche zur Linken des Buchstaben gesetzt wird, und anzeigt, wie oft dieser Buchstabe zu sich selbst gesetzt werden soll. Diese Coefficienten dienen daher zur Abkürzung der Schreibart. Z. B. in dem Ausdrucke $3a$ heißt 3 der Coefficient von a und bedeutet, daß der Buchstabe a dreymal zu sich selbst gesetzt werden soll. Es ist nämlich $3a = a + a + a$. Ferner ist $5bc = bc + bc +$

$bc + bc + bc$; $2m = m + m$; $-4d = (-d) + (-d) + (-d) + (-d)$; u. s. w.

Der Exponent eines Buchstaben ist jene Ziffer, welche zur Rechten desselben in die Höhe gesetzt wird und andeutet, wie oft dieser Buchstabe als Factor gesetzt ist. Sie sind daher ebenfalls eine Abkürzung der Schreibart. Denn a^3 heißt soviel, als a mal a mal a, d. h. $a^3 = a \times a \times a$. Ferner ist $b^5 \times = b \times b \times b \times b \times b$ u. s. f.

§. 36.

Aufgabe. Die Addition in Buchstabengrößen zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die gegebenen Buchstabengrößen sich auf verschiedene Buchstaben beziehen, so werden sie addirt, indem man diese alle mit ihren Zeichen und etwaigen Coefficienten nebeneinander schreibt und dabey die Ordnung des Alphabets beobachtet.

II. Kommen die nämlichen Buchstaben mehrmals vor, so setze man die gleichnamigen unter einander, addire ihre etwaige positive oder negative Coefficienten nach den oben (§. 9.) gegebenen Regeln, und schreibe, wenn ihre Summe nicht $= o$ wird, zu derselben diesen Buchstaben einmal.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist theils für sich selbst einleuchtend, theils folgt sie aus den oben (§. 9.) bewiesenen Sätzen.

Beyspiele. I. Man soll folgende Größen: $3a$, b, $-3c$, d und $-f$ addiren, so ist die Summe: $3a + b - 3c + d - f$.

II. Es soll addirt werden: a und $\frac{m}{n}$ und $3b$ und $-d$, so ist die Summe $a + 3b - d + \frac{m}{n}$, u. s. f.

III. Zu $3a - b + 3g - d + 2f$ sollte addirt werden $+ 5b - 2a - 5f - g + 3d$, so ordne man zuerst diese Größen gehörig, wie folgt:

$$\begin{array}{l} 3a - b - d + 2f + 3g \\ -2a + 5b + 3d - 5f - g \quad \text{nun reducire man} \\ \hline a + 4b + 2d - 3f + 2g. \quad \text{Summe} \end{array}$$

IV.
$$\left.\begin{array}{l} 2a - 3b + 2d - g \\ -5a + 4b - 2d + 2g \\ 4a - b + d \\ -2a + 2b + 2d - h \end{array}\right\} \text{Zu addiren}$$
$$\overline{-a + 2b + 3d + g - h.} \quad \text{Summe.}$$

V.
$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2b - bc \\ -a - 5b \end{array}\right\} \text{Zu addiren}$$
$$\overline{2a - 3b - bc.} \quad \text{Summe.}$$

§. 37.

Anmerkung. Zur Erläuterung und Probe der Addition in Buchstaben kann man denselben bestimmte Zahlenwerthe geben. Nennt man z. B. im letzten Beyspiel des vorigen §. a Gulden, b Kreuzer und c Pfennige, so wäre $3a + 2b - 6c = 3$ fl. $+ 2$ kr. $- 6$ pf. $= + 722$ pf.; ferner $- a - 5b = - 260$ pf., folglich die Summe $= 722 - 260 = 462$ Pf. Nun ist aber auch $2a - 3b - 6c = 2$ fl. $- 3$ kr. $- 6$ Pf. $= 462$ Pf. wie vorhin.

§. 38.

Aufgabe. Die Subtraction in Buchstaben zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn die abzuziehende Größe keine Buchstaben mit der, wovon der Abzug geschehen soll, gemeinschaftlich hat, so verändere man in jener die Zeichen in die entgegengesetzte und ordne nun alle Buchstabengrößen nach dem Alphabete.

II. Befinden sich in beyden Größen gemeinschaftliche Buchstaben, so ordne man zuerst beyde nach dem Alphabete, setze die abzuziehende unter die andere, verändere in jener die Zeichen und befolge nun die Regeln der Addition. (§. 36.)

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils auf einleuchtenden Sätzen, theils auf den oben (§. 13.) erwiesenen Lehren von der Subtraction der entgegengesetzten Zahlen.

Beyspiele. I. Man soll von $a + 3b - d$ abziehen $- m + c - g$, so ist $(a + 3b - d) - (- m + c - g) = (a + 3b - d) + (m - c + g) = a + 3b - c - d + m + g$ die richtige Differenz.

II. Von $- g + 3f + 4a$ soll man abziehen $- 2b + 3d - c + h$, so ist $(- g + 3f + 4a) - (- 2b + 3d - c + h) = (- g + 3f + 4a) + (+ 2b - 3d + c - h) = 4a + 2b + c - 3d + 3f - g - h$.

III. Von $3b - 4c + 5a - d + 2g$ soll abgezogen werden $- 3g + 2a - 4b + d - 3c + f$, so ist die Rechnung diese:

$$\left.\begin{array}{l} +5a+3b-4c-d+2g \\ +2a-4b-3c+d-3g+f \\ -\quad+\quad+\quad-\quad+\quad- \end{array}\right\}\text{ Geordnet}$$

$$+3a+7b-c-2d+5g-f.\quad\text{Differenz.}$$

IV. Von $12a - 8b + 7c - 4d + g$ soll man abziehen $15a - 8b - 9c - 6d$.

Dies giebt:

$$\begin{array}{l} 12a-8b+7c-4d+g \\ 15a-8b-9c-6d \\ -\quad\quad+\quad+\quad+ \end{array}$$

$$-3a \quad * \quad +16c+2d+g.\quad\text{Unterschied.}$$

§. 39.

Aufgabe. Potenzen, deren Wurzeln durch Buchstaben ausgedrückt sind, mit einander zu multipliciren.

Auflösung. I. Wenn die Potenzen verschiedene Wurzeln haben, so werden die Factoren nur mit dem Multiplicationszeichen zusammengesetzt und die Multiplication blos angedeutet.

II. Sind hingegen Potenzen mit einerley Wurzeln zu multipliciren, so setze man die Wurzel einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher der Summe der gegebenen Exponenten der Factoren gleich ist.

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Regel versteht sich von selbst, und jene der zweyten ergiebt sich aus der Bedeutung der Exponenten (in §. 35.) wie nachstehende Beyspiele noch mehr erläutern werden.

Beyspiele. I. $a^2 \times b^3 = a^2 b^3$; $a^2 \times b^2 + c^3 = a^2 b^2 c^3$; $a^n \times b^m = a^n b^m$; u. s. f.

II. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$; denn $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$; $b^3 \times b^4 = b^7$; $d^n \times d^m = d^{n+m}$, u. s. w.

§. 40.

Aufgabe. Eine Potenz auf eine neue Potenz zu erheben.

Auflösung. Man setze die Wurzel und gebe ihr einen Exponenten, welcher dem Producte beyder Exponenten gleich ist.

Beweis und Beyspiele. $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$. Denn $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$. Ganz allgemein ausgedrückt ist $(a^n)^m = a^{nm}$; u. s. f.

§. 41.

Aufgabe. Ein Product mit mehreren Factoren auf eine verlangte Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe jeden Factor dieses Productes zur verlangten Potenz und multiplicire diese Potenzen miteinander.

Beweis und Beyspiele. $(ab)^3 = a^3 b^3$. Denn $(ab)^3 = ab.\ ab.\ ab = aaabbb = a^3 b^3$. Ganz allgemein ist $(ab)^n = a^n b^n$.

§. 42.

Aufgabe. Einen Bruch auf eine bestimmte Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe Zähler und Nenner des Bruchs zur gegebenen Potenz, so ist die Aufgabe aufgelößt.

Beweis u. Beyspiele. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$. Allgemein ist wieder $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, u. s. f.

§. 43.

Aufgabe. Die Multiplication in Buchstaben zu verrichten, wenn Multiplicand und Multiplicator aus mehreren Buchstabengrößen bestehen.

Auflößung. I. Man ordne beyde Factoren nach alphabetischer Aufeinanderfolge der Buchstaben, schreibe sie untereinander, und ziehe einen Strich.

II. Man multiplicre jedes einzelne Glied des Multiplicanden mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators, indem man *a*) die Zeichen (nach §. 21.) bestimmt, *b*) die etwaigen Coefficienten zusammen multiplicirt und *c*) wegen der Buchstaben den obigen Regeln (§. 39—42.) folget.

III. Werden nun diese erhaltene Theilfacta (nach §. 36.) addirt, so ist diese Summe das verlangte Product.

Beweis. Das Verfahren der Auflösung ist theils durch sich selbst, theils durch die in derselben angeführten Vordersätze gerechtfertigt.

Beyspiele. I.

$$\left.\begin{array}{l} a + b \\ a + b \end{array}\right\} \text{Factoren}$$

$$\text{Theilproducte} \left\{\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad\;\; + ab + b^2 \end{array}\right.$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \text{ Product.}$$

II.

$$\left.\begin{array}{l} a - b \\ a - b \end{array}\right\} \text{Factoren}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - ab \\ \quad\;\; - ab + b^2 \end{array}\right\} \text{Theilfacta}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \text{ Hauptproduct.}$$

III.

$$\left.\begin{array}{l} a + b \\ a - b \end{array}\right\} \text{Factoren}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad\;\; - ab - b^2 \end{array}\right\} \text{Theilfacta}$$

$$a^2 - b^2 \text{ Hauptproduct.}$$

IV.

$$\left.\begin{array}{l} a + b - d \\ a - b - d \end{array}\right\} \text{Faktoren.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + ab - ad \\ \quad\;\; - ab - b^2 + bd \\ \quad\;\; \quad\;\; - ad - bd + d^2 \end{array}\right\} \text{Theilfacta.}$$

$$a^2 - 2ad - b^2 + d^2 \text{ Product.}$$

V.
$$\begin{array}{l} 5a - 2b - d \\ 2a + 3b - 2d \\ \hline 10a^2 - 4ab - 2ad \\ \quad 15ab - 6b^2 - 3bd \\ \quad\quad -10ad + 4bd + 2d^2 \\ \hline 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2. \end{array}$$

VI.
$$\begin{array}{l} a^2 - 3b^2 + 2c - d \\ 3a + 2b^3 - c^2 \\ \hline 3a^3 - 9ab^2 + 6ac - 3ad \\ \quad +2a^2b^3 - 6b^5 + 4b^3c - 2b^3d \\ \quad\quad - a^2c^2 + 3b^2c^2 - 2c^3 + c^2d \\ \hline 3a^3 - 9ab^2 + 2a^2b^3 + 6ac - a^2c^2 - 3ad - 6b^5 \\ + 4b^3c + 3b^2c^2 - 2b^3d - 2c^3 + c^2d. \end{array}$$

VII.
$$\begin{array}{l} 6a^n - 2b^m \\ 4a^n + 3b^n \\ \hline 24a^{2n} - 8a^nb^m + 18a^nb^n - 6b^{m+n}. \end{array}$$

§. 44.

Aufgabe. Potenzen, deren Wurzeln Buchstabengrößen sind, durch einander zu dividiren.

Auflösung. I. Wenn die Wurzeln verschieden sind, so kann man die zu verrichtende Division nur andeuten.

II. Sollen hingegen Potenzen von einerley Wurzeln unter einander dividirt werden, so setze man die gemeinsame

Wurzel nur einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher dem Unterschiede der Exponenten des Divisors von jenem des Dividenden gleich ist.

Beweis. Die Gültigkeit der ersten Regel leuchtet von selbst ein; jene der zweyten ergiebt sich aus der Bedeutung der Exponenten (§. 35.) und wird noch deutlicher durch das Beyspiel werden.

Beyspiele. I. Wenn a^3 durch b^2 dividirt werden soll, so ist der Quotient $a^3 : b^2$, oder auch $\frac{a^3}{b^2}$. Allgemein giebt a^n durch b^m dividirt den Quotienten $a^n : b^m$ oder $\frac{a^n}{b^m}$.

II. $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$. Denn es ist $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$. Allgemein wird $a^m : a^n = a^{m-n}$.

§. 45.

Lehrsatz. Jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich.

Beweis. $a^n : a^n = a^{n-n}$ (§. 44.) $= a^0$. Allein $a^n : a^n = 1$, da jede Größe sich selbst einmal mißt. Daher auch $a^0 = 1$. Auf gleiche Weise ist $8^0 = 1$; $1000^0 = 1$; $8746^0 = 1$; u. s. f.

§. 46.

Lehrsatz. Größen mit negativen Exponenten sind ächten Brüchen gleich, deren Zähler 1, und deren Nenner eben diese Größen mit gleichen positiven Exponenten sind.

V.

$$\begin{array}{l} 5a - 2b - d \\ 2a + 3b - 2d \\ \hline 10a^2 - 4ab - 2ad \\ \quad\quad 15ab - 6b^2 - 3bd \\ \quad\quad\quad - 10ad + 4bd + 2d^2 \\ \hline 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2. \end{array}$$

VI.

$$\begin{array}{l} a^2 - 3b^2 + 2c - d \\ 3a + 2b^3 - c^2 \\ \hline 3a^3 - 9ab^2 + 6ac - 3ad \\ \quad + 2a^2b^3 - 6b^5 + 4b^3c - 2b^3d \\ \quad\quad - a^2c^2 + 3b^2c^2 - 2c^3 + c^2d \\ \hline 3a^3 - 9ab^2 + 2a^2b^3 + 6ac - a^2c^2 - 3ad - 6b^5 \\ + 4b^3c + 3b^2c^2 - 2b^3d - 2c^3 + c^2d. \end{array}$$

VII.

$$\begin{array}{l} 6a^n - 2b^m \\ 4a^n + 3b^n \\ \hline 24a^{2n} - 8a^nb^m + 18a^nb^n - 6b^{m+n}. \end{array}$$

§. 44.

Aufgabe. Potenzen, deren Wur... sind, durch einander zu divi...

Auflösung. I. ... kann man die zu...

II. S... ter ...

Wurzel nur einmal und ...
dem Unterschiede der Exponenten ...
Dividenden gleich ist.

Beweis. Die Gültigkeit ...
selbst ein; jene der zweyten ...
der Exponenten (§. 35.) und ...
Beyspiel werden.

Beyspiele. I. Wenn ...

so ist der Quotient a^3 : ...

a^n durch b^m dividirt den Quotien...

II. $a^5 : a^3 = a^{5-3}$ ...

$aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa}$ ...

wird $a^m : a^n = a^{m-}$ ...

§. 25.

Lehrsatz. Jede Größe ...
gleich.

... sind Wur-
... Grad der
... Potenz der
... a^n.

... $\frac{1}{m} = \sqrt[m]{a}$.

... a. Eben so
... $\sqrt[m]{a}$, und

... ; $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{c}$;
... f. w.

... n zu verrichten.
... nd Divisor keine ge-
... läßt sich die Division
... em Buchstaben, der auch
... enden vorkömmt,
... m Gliede dies...
(§. 28.)

Beweis. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Denn es ist $a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$ (§. 11.) Allein $a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n}$ (§. 39. II.) $= \frac{1}{a^n}$. Folglich muß auch $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ seyn.

Beyspiele. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; u. s. f.

§. 47.

Anmerkung. Da $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ u. s. f., $10^0 = 1$, (§. 45.) und $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ (§. 46.) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$; $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$ u. s. w., so kann man jede gemischte Zahl, welche aus Ganzen und Decimalbrüchen besteht, durch Ziffer ausdrücken, welche in lauter Potenzen von 10 multiplicirt sind. So ist z. B. $7345,8296 = 7 \times 10^{+3} + 3 \times 10^{+2} + 4 \times 10^{+1} + 5 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$ u. s. f.

§. 48.

Lehrsatz. Größen mit gebrochenen Exponenten sind Wurzelgrößen, bey welchen des Exponenten Nenner den Grad der Wurzel, dessen Zähler hingegen den Grad der Potenz der gegebenen Größe bezeichnet. Z. B. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beweis. $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$ (§. 40.) Allein $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$. Denn $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{m}{m}}$ (§. 40.) $= a^1 = a$. Eben so ist auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$. Folglich ist $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, und daher auch $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Beyspiele. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{b^4}$; $c^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{c}$; $d^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{d}$; $256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = 4$; u. s. w.

§. 49.

Aufgabe. Die Division in Buchstaben zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn Dividend und Divisor keine gemeinschaftliche Buchstaben enthalten, so läßt sich die Division nur bruchweise andeuten.

II. Besteht der Divisor aus einem Buchstaben, der auch zugleich in den Gliedern des Dividenden vorkömmt, so vergleiche man den Divisor mit jedem Gliede dieses Dividenden, bestimme das Zeichen nach (§. 28.) und setze jene Buchstaben, welche dieses Glied mehr als der Divisor enthält, in den Quotienten.

III. Wenn Dividend und Divisor aus mehreren Gliedern von zum Theil gleichen Buchstaben, mit verschiedenen Zei-

chen, Coefficienten und Exponenten bestehen, so ordne man zuerst die Buchstaben in beyden nach dem Alphabete, bestimme aus dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden den Quotienten, indem man *a.*) die Zeichen nach (§. 28.) setzt, *b.*) mit dem etwaigen Coefficienten des Divisors in jenen des Dividenden dividirt, *c.*) die gemeinschaftlichen Buchstaben von beyden im Quotienten wegläßt und *d.*) wenn etwa Potenzen von gleichen Wurzeln zu dividiren sind, den obigen Regeln (§. 44.) folget.

IV. Mit dem (nach III.) jedesmal gefundenen Theile des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor und subtrahire dieses Product von den gehörigen Theilen des Dividenden, bis entweder die Division sich schließt, oder am Ende ein Rest bleibt, den man in Form eines Bruchs zu schreiben pflegt.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Vorschriften beruht theils auf bekannten Lehren von der Division, theils auf den in der Auflösung selbst bemerkten Sätzen.

Beyspiele. I. Es soll $a - b + c$ durch $m + n$ dividirt werden, so setze man $\frac{a - b + c}{m + n}$ als Quotienten u. s. w.

Divisor	Dividend	Quotient
II. a	$3a - a^2 + 4ab - ad$	$3 - a + 4b - d$

Divisor.	Dividend.	Quotient.
III. $-b$	$-ab + 3b^2 - 4bd + c$	$+a - 3b + 4d + \frac{c}{-b}$

IV. $a + b \mid a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b$

$$\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \hline ab + b^2 \\ ab + b^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

V. $a - b \mid a^2 - b^2 \mid a + b$

$$
\begin{array}{rrr}
a^2 & - ab & \\
\hline
 & + ab & - b^2 \\
 & + ab & - b^2 \\
\hline
 & 0 & 0
\end{array}
$$

VI. $a + b - d \mid a^2 - 2ad - b^2 + d^2 \mid a - b - d$

$$
\begin{array}{rrrrr}
a^2 & + ab & - ad & & \\
\hline
 & - ab & - ad & - b^2 & \\
 & - ab & - b^2 & + bd & \\
\hline
 & & - ad & - bd & + d^2 \\
 & & - ad & - bd & + d^2 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

VII. $2a + 3b - 2d \mid 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \mid 5a - 2b - d$

$$10a^2 + 15ab - 10ad$$

$$-4ab - 2ad - 6b^2 + bd + 2d^2$$

$$-4ab \qquad - 6b^2 + 4bd$$

$$-2ad - 3bd + 2d^2$$

$$-2ad - 3bd + 2d^2$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

VIII. $a - b \mid a^3 - b^3 \mid a^2 + ab + b^2$

$$a^3 - a^2b$$

$$+ a^2b - b^3$$

$$a^2b - ab^2$$

$$+ ab^2 - b^3$$

$$ab^2 - b^3$$

$$0 \quad 0$$

$$\text{IX.}\quad 1 - 2x + x^2 \,|\, 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \,|\, 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

$$\begin{array}{l}
1 - 2x + x^2 \\
\hline
-3x + 9x^2 - 10x^3 \\
-3x + 6x^2 - 3x^3 \\
\hline
3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \\
3x^2 - 6x^3 + 3x^4 \\
\hline
-x^3 + 2x^4 - x^5 \\
-x^3 + 2x^4 - x^5 \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Zur fernern Übung noch folgende (aus Maler's Algebra, fünfte Auflage, 1810 S. 26. genommene) etwas mehr zusammengesetzte Beyspiele:

X. $24a^{2m} + 22a^m b^n + 4b^{2n} - 24a^m c + 8a^m - 6b^n c^3 - 8b^n c + 2b^n + 12c^4 - 4c$
$: 4a^m + b^n - 2c = 6a^m + 4b^n - 6c^3 + 2.$

XI. $21a^4 a^m + 63a^4 b^n - 36a^m b^m + 48a^m c^n - 108b^m b^n - 56a^4 c^x + 144b^n c^n + 96b^m c^x - 128c^n c^x$
$: 3a^m + 9b^n - 8c^x = 7a^4 - 12b^m + 16c^n.$

XII. $44a^{2m+2} + 22a^{m+1}b^3 - 48a^{m+1}b^7 - 24b^{10} + 64a^{m+1}c^{m+n} + 32b^3 c^{m+n}$
$: 4a^{m+1} + 2b^3 = 11a^{m+1} - 12b^7 + 16c^{m+n}.$

XIII. $35a^{2n-2} - 84a^{n-1} + 25a^{n-1}b - 60b + 20a^{n-1}c^{m-1} - 48c^{m-1}$
$: 7a^{n-1} + 5b + 4c^{m-1} = 5a^{n-1} - 12.$

XIV. $x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394 : x^2 + 2x - 99$
$= x^3 - 2x^2 + 103x - 206.$

Dritter Abschnitt.

Einleitung zur Algebra.

§. 50.

Erklärung. Eine Gleichung nennt man einen Ausdruck, worin einerley Größe auf zwey verschiedene Arten dargestellt wird. Die durch das Zeichen der Gleichheit getrennten Stücke der Gleichung heißen ihre Theile, und die in den Theilen etwa durch die Zeichen + und — abgesonderten Größen werden ihre Glieder genannt.

§. 51.

Anmerkung. Da sich die Größe 7 durch $3 + 4$ und auch durch $12 - 5$ darstellen läßt, so ist der Ausdruck $3 + 4 = 12 - 5$ eine Gleichung. Ihre Theile sind $3 + 4$ und $12 - 5$; die Zahlen 3, 4, 12 und 5 aber heißen ihre Glieder. Andere Beyspiele sind: $3 \times 8 = 20 + 4$; oder $48 : 6 = 12 - 6 + 2$, oder $3^2 + 5 = 8 + 6$, u. s. w. Allgemein ausgedrückt: $a + b - c = 3g - h$. oder $a^2 - 3b = \frac{h}{g} + f$, oder $2b^3 - 4a = \sqrt{c} + 3g$, u. s. f.

§. 52.

Erklärung. Die Algebra ist derjenige Theil der Mathematik, welcher aus gegebenen Eigenschaften bekannter Größen die unbekannten durch Hülfe der Gleichungen finden lehrt.

§. 53.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieses Begriffs (§. 52.) folgende einfache algebraische Frage: Was wird es für eine Zahl seyn, deren Hälfte, Drittheil und Vierttheil zusammengenommen die Zahl selbst um eins übertreffen? Die Auflösung davon siehe unten (§. 69.)

(Andere Beyspiele in den Vorlesungen.)

§. 54.

Willkührlicher Satz. Da in den algebraischen Gleichungen (§. 50.) bekannte Größen mit unbekannten verbunden sind, so ist es nöthig, diese von jenen auf eine bestimmte Art zu unterscheiden. Man bezeichnet daher die bekannten Größen mit den ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, a, b, c, d u. s. f. die unbekannten hingegen mit den letzten Buchstaben x, y, z u. s. f. So bedeuten in der Gleichung $3a + b^2 - f = d + x$, die Buchstaben a, b, f und d die bekannten Größen, x hingegen ist das Unbekannte.

§. 55.

Erklärung. Die Gleichungen werden auf verschiedene Weise eingetheilt. Hier bemerken wir folgende Gattungen. Eine Gleichung heißt bestimmt, wenn nur ein Unbekanntes in ihr vorkömmt; obgleich dasselbe mehrmals wiederholt wäre. Z. B. die Gleichungen: $a + bx = d + g$;

$x + a = 3x - b$; $x^2 - 2x + a = b + 3c$ sind bestimmte. Eine unbestimmte Gleichung ist jene, welche zwey oder mehrere Unbekannte enthält; z. B. folgende: $a + 2x - y = b - 3d$; $2x + y = 3a - z$; $\frac{a}{b} + x - y = cz$, u. s. f.

§. 56.

Erklärung. Sowohl die bestimmten als die unbestimmten Gleichungen (§. 55.) werden in verschiedene Ordnungen oder Grade eingetheilt. Eine Gleichung heißt von der ersten Ordnung oder vom ersten Grade, wenn das Unbekannte darin sich in der ersten Potenz befindet; z. B. folgende: $bx = a - b$; oder $2y - a = b + c - d$. In einer Gleichung von der zweyten Ordnung oder vom zweyten Grade, welche man auch eine quadratische nennt, ist das Unbekannte auf der zweyten Potenz, oder es sind zwey Unbekannte durch Multiplication mit einander verbunden; z. B. $x^2 + ax = b$, oder $3x^2 - a = b - d$; oder $a + xy = \frac{b-c}{2}$ u. s. f. Auf ähnliche Weise giebt es Gleichungen vom dritten Grade, welche auch cubische heißen, u. s. f. Eine quadratische Gleichung heißt rein, wenn sie das Unbekannte allein auf der zweyten Potenz enthält; z. B. $x^2 + a = b - c$, oder auch $3y^2 = 2a - \frac{b}{2}$ u. s. f.; unrein hingegen, wenn sie außer dem Quadrate der unbekannten Größe dieselbe noch in der ersten Potenz enthält. So ist $x^2 + 3x = b$, oder $3y^2 - ay = d$, oder $2y^2 - by - c = d + y$ eine unreine quadratische Gleichung.

§. 57.

Zusatz. Aus den bisherigen Erklärungen (§. 55. u. 56.) ergiebt es sich nun auch, was eine einfache bestimmte, eine einfache unbestimmte, eine bestimmte oder unbestimmte quadratische Gleichung u. s. f. sey. (Beyspiele darüber in den Vorlesungen.)

§. 58.

Anmerkung. Da alle algebraische Aufgaben durch Gleichungen aufgelößt werden, welche die Bedingnisse jener Aufgaben vollkommen genau enthalten, so ist es gewöhnlich, diese Aufgaben selbst, so wie die Gleichungen einzutheilen. Hieraus ergiebt es sich, was man eine bestimmte oder unbestimmte, eine einfache oder quadratische Aufgabe u. s. w. nennt.

§. 59.

Erklärung. Eine Gleichung auflösen heißt, den Werth der unbekannten Größen in ihr bestimmen. Enthält die Gleichung nur ein Unbekanntes, so ist sie aufgelößet, wenn man dasselbe in den einen Theil der Gleichung allein bringen kann. Denn nun befinden sich in dem andern Theile nur bekannte Größen, welche, gehörig verbunden, dem Werthe des Unbekannten gleich sind. Z. B. in der Gleichung $x = a + 3b - \frac{n}{m}$ ist der Werth von x bekannt, da die Größen a, b, n und m bekannte Größen sind; diese Gleichung ist also eine aufgelößte. Die Fälle, wo in einer Gleichung zwey oder mehrere Unbekannte vorkommen, werden wir unten besonders betrachten.

§. 60.

Aufgabe. Die allgemeinsten Mittel anzugeben, worauf die Absonderung der bekannten Größen von den unbekannten in den Gleichungen beruhet.

Auflösung. Diese Mittel sind folgende:

I. Man setze beyden Theilen der Gleichung einerley Größe zu, oder nehme einerley Größe von beyden Theilen hinweg.

II. Man multiplicire beyde Theile der Gleichung mit einerley Größe, oder dividire beyde durch Einerley.

III. Man erhebe beyde Theile zu Potenzen von einerley Graden, oder ziehe aus beyden Theilen die Wurzeln von gleichen Graden.

Beweis. Die Richtigkeit dieser drey Regeln beruhet auf dem einfachen Grundsatze: wenn man mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vornimmt, so erhält man wieder gleiche Größen.

Beyspiele. I. Die Gleichung sey
$x + a = d$. Wird hier
$a = a$ beyderseits abgezogen, so bleibt

$x = d - a$, und die Gleichung ist aufgelößet, da die bekannte Differenz von $d - a$ dem Werthe von x gleich ist.

II. In der Gleichung:
$y - b = a + c$, setze man
$b = b$ und addire beyderseits, so ist

$y = a + c + b$, folglich der Werth von y bekannt.

III. In $\frac{x}{a} = b - c$, multiplicire man beyderseits mit a, so wird $x = a \times (b - c)$, oder $x = ab - ac$, und der Werth von x ist bestimmt.

IV. Es sey $by = a + b$, so dividire man beyde Theile der Gleichung mit b, so erhält man $y = \frac{a+b}{b}$, oder $y = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}$, oder $y = \frac{a}{b} + 1$, und die Gleichung ist aufgelößt.

V. Wäre $\sqrt{x} = a + b$, so würde man beyde Theile zum Quadrate erheben, und es würde $x = (a + b)^2$, oder $x = a^2 + 2a\,b + b^2$, wodurch die Gleichung aufgelößt ist.

VI. Hätte man $x^2 = b - c$, so müßte man aus beyden Theilen die Quadratwurzel ziehen. Dies giebt $x = \sqrt{(b - c)}$, und der Werth von x ist bestimmt.

§. 61.

Zusatz. Aus diesen einfachen Beyspielen (§. 60.) fließen folgende Regeln zur Absonderung der bekannten von den unbekannten Größen:

I. Jede Größe kann aus einem Theile der Gleichung in den andern, der Gleichheit unbeschadet, mit dem entgegengesetzen Zeichen übertragen werden.

II. Jeder Factor oder Divisor einer Größe fällt weg; indem man jedes andere Glied der Gleichung mit demselben dividirt oder multiplicirt.

§. 62.

Zusatz. Zur Uebung in der Auflößung der Gleichungen sollen hier einige mehr zusammengesetzte Fälle betrachtet werden.

I. $\frac{x}{a} + b - d = c$.

Alles mit a multiplicirt giebt

$$x + ab - ad = ac.$$

Durch Uebertragung von $+ ab$ wird

$$x - ad = ac - ab.$$

Durch Uebertragung von $- ad$ erhält man

$$x = ac - ab + ad;$$

Da nun a gemeinschaftlicher Factor ist, so wird

$$x = (c - b + d)\, a.$$

II. In $ay + \frac{b}{c} = n$, trage man $\frac{b}{c}$ hinüber. Dies giebt

$$ay = n - \frac{b}{c}.$$

Dividirt man nun Alles mit a, so wird

$$y = \frac{n}{a} - \frac{b}{ac}.$$

III. Es sey $3x + ax = b - c$, so setze man x als gemeinschaftlichen Factor, und es wird

$$(3 + a)\, x = b - c.$$

Wird nun alles mit $3 + a$ dividirt, so hat man

$$x = \frac{b - c}{3 + a}.$$

IV. Man habe $3x - \frac{a}{b} = x + d$, so wird durch Uebertragung von x

$$3x - x - \frac{a}{b} = d$$

Die Uebertragung von $-\frac{a}{b}$ giebt

$$3x - x = d + \frac{a}{b}.$$

Reducirt man die x, so ist

$$2x = d + \frac{a}{b}.$$

Dividirt man nun alles durch 2, so wird

$$x = \frac{d}{2} + \frac{a}{2b}.$$

V. Es sey $\frac{ax}{b} = c + \frac{dx}{n}$, so wird durch Multiplication mit b

$$ax = bc + \frac{bdx}{n}$$

und durch Multiplication mit n

$$anx = bcn + bdx.$$

Die Uebertragung von bdx giebt

$$anx - bdx = bcn$$

Setzt man x als gemeinschaftlichen Factor, so ist

$$(an - bd)\, x = bcn$$

und durch Division mit $an - bd$ erhält man

$$x = \frac{bcn}{an - bd}.$$

VI. Die Gleichung

$$x^2 - ab = c$$

giebt durch Uebertragung von $- ab$

$$x^2 = c + ab$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{(c + ab)}.$$

VII. Wäre die Gleichung

$\sqrt{x} + b - a = m$, so entsteht durch Uebertragung von $+ b$ und $- a$

$\sqrt{x} = m - b + a$, und indem man beyde Theile zum Quadrate erhebt,

$x = (m - b + a)^2$ oder durch wirkliche Berechnung dieses neuen Quadrats

$$x = m^2 - 2mb + b^2 + 2\,(m - b)\,a + a^2.$$

VIII. Es sey ferner

$5x^2 + \frac{x^2}{2} = a + 4x^2$, so wird durch Multiplication mit 2

$10x^2 + x^2 = 2a + 8x^2$, und, durch Hinübertragen von $+ 8x^2$

$10x^2 + x^2 - 8x^2 = 2a.$

Reducirt man den ersten Theil, so ist

$3x^2 = 2a$, folglich durch Division mit 3

$x^2 = \frac{2a}{3}$, und daher durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{\frac{2a}{3}}.$$

§. 63.

Anmerkung. Bey jeder algebraischen Aufgabe kömmt es auf drey Stücke an: auf die schickliche Benennung der in ihr vorkommenden Größen durch Buchstaben; auf die Bildung einer Gleichung, welche den Bedingnissen der Aufgabe vollkommen entspricht und auf die Auflösung dieser Gleichung. Da alles dieses durch wirkliche Beyspiele den Anfängern deutlicher wird, als durch blose Regeln, so scheint es zweckmäßig, nun sogleich zu den Aufgaben zu schreiten.

Vierter Abschnitt.

Arithmetische Aufgaben.

I. Bestimmte Aufgaben mit einem Unbekannten.

§. 64.

I. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die ihrer Hälfte, ihrem Drittheil und Viertheil beygefügt, 148 giebt.

Auflösung. Wenn man die zu findende Zahl x nennt, so ist $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte, $\frac{x}{3}$ ihr dritter und $\frac{x}{4}$ ihr vierter Theil. Folglich ist die Summe aus der Zahl, ihrer Hälfte, ihrem dritten und vierten Theile $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$. Da nun diese Summe 148 betragen soll, so entsteht folgende Gleichung:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 148.$$

Bringt man nun (nach §. 61.) die Divisoren 2, 3 und 4 hinweg, so wird $2x + x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 296$, ferner $6x + 3x + 2x + \frac{6x}{4} = 888$, und $24x + 12x + 8x + 6x = 3552$, folglich, durch Summirung aller x,

$50x = 3552$, und, durch Division mit 50 hat man $x = \frac{3552}{50} = \frac{1776}{25}$.

Probe. Hier ist die gesuchte Zahl $= \frac{1776}{25}$, ihre Hälfte $= \frac{888}{25}$, ihr dritter Theil $= \frac{592}{25}$ und ihr vierter Theil $= \frac{444}{25}$; folglich die Summe von Allem $= \frac{1776}{25} + \frac{888}{25} + \frac{592}{25} + \frac{444}{25} = \frac{3700}{25} = 148$, wie verlangt wurde.

§. 65.

Anmerkung. Nach dem Muster der vorigen Aufgabe können unzählig viele gebildet werden. Die Auflösung derselben ist eine lehrreiche Uebung für die ersten Anfänger. Beyspiele darüber kommen in den Vorlesungen vor.

§. 66.

II. Aufgabe. Die Zahl 600 soll in vier Theile getheilt werden, die eine arithmetische Progression bilden, deren Unterschied 4 ist.

Auflösung. Nennt man den ersten Theil x, so ist der zweyte $x + 4$, der dritte $x + 8$ und der letzte $x + 12$. Da nun nach der Aufgabe diese vier Theile zusammengenommen 600 betragen sollen, so hat man die Gleichung.

$x + x + 4 + x + 8 + x + 12 = 600$. Werden hier sowohl alle x, als die dabey stehenden Zahlen addirt, so ist $4x + 24 = 600$. Durch Uebertragung von 24 erhält man $4x = 600 - 24$, und durch Division mit 4 wird

$$x = \frac{600 - 24}{4} = \frac{576}{4} = 144.$$

Probe. Wenn 144 der erste Theil der Reihe ist, so wird 148 der zweyte, 152 der dritte und 156 der vierte. Wirklich ist auch $144 + 148 + 152 + 156 = 600$.

§. 67.

III. Aufgabe. Man soll die Zahl 968 in 5 Theile theilen, die eine geometrische Progression bilden, deren Exponent 3 ist.

Auflösung. Wenn x der kleinste dieser fünf Theile heißt, so ist $3x$ der folgende, $9x$ der dritte, $27x$ der vierte und $81x$ der letzte. Weil nun sämmtliche fünf Theile zusammengenommen 968 geben sollen, so entsteht die Gleichung

$$x + 3x + 9x + 27x + 81x = 968:$$

addirt man alle x, so ist

$$121x = 968,$$ und folglich

$$x = \frac{968}{121} = 8.$$

Probe. Wenn der erste Theil 8 ist, so wird der zweyte 24, der dritte 72, der vierte 216 und der fünfte 648. Auch ist in der That $8 + 24 + 72 + 216 + 648 = 968$.

§. 68.

IV. Aufgabe. Alexander der Große sprach zu seinen Feldherren: Ich bin zwey Jahre älter als Hephästion; Clytus sagte: ich bin vier Jahre älter als ihr beyde, und Kallisthenes setzte hinzu: Mein Vater ist 96 Jahre alt, und so alt, als alle drey. Wie alt war Jeder?

Auflösung. Da es hier darauf ankömmt, das Alter des Hephästions zu finden, so heißt dieses x. Da Alexander zwey Jahre älter ist, so ist dessen Alter $= x + 2$. Das Alter von beyden beträgt also $2x + 2$.

Da nun Clytus vier Jahre älter ist, als beyde, so muß dessen Alter $= 2x + 2 + 4 = 2x + 6$ seyn. Nun ist der Vater des Kallisthenes 96 Jahre alt, und so alt, als alle drey zusammen; folglich entsteht die Gleichung

$$x + x + 2 + 2x + 6 = 96 \text{ oder}$$

$$4x + 8 = 96, \text{ folglich}$$

$$4x = 96 - 8 \text{ und}$$

$$x = \frac{96 - 8}{4}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{88}{4} = 22.$$

Probe. Da Hephästion 22 Jahre alt ist, so muß Alexander $22 + 2$ oder 24 Jahre und Clytus $22 + 24 + 4$ oder 50 Jahre alt seyn. Auch beträgt das Alter von allen drey $22 + 24 + 50$ oder 96 Jahre.

§. 69.

V. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil die Zahl selbst um 1 übertrifft.

Auflösung. Nennt man die zu findende Zahl x, so ist $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte, $\frac{x}{3}$ ihr dritter Theil, und $\frac{x}{4}$ ihr vierter Theil, und die Gleichung wird folgende:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1, \text{ folglich}$$

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} = 2x + 2, \text{ daher}$$

$$3x + 2x + \frac{6x}{4} = 6x + 6, \text{ oder}$$

$$12x + 8x + 6x = 24x + 24, \text{ also}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$26x - 24x = 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12.$$

Probe. Die Hälfte der gefundenen Zahl ist 6, ihr dritter Theil 4, und ihr vierter Theil ist 3. Auch hat man

$$6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1.$$

§. 70.

VI. Aufgabe. Ein Künstler verbindet sich auf 60 Tage unter der Bedingung zu arbeiten, daß ihm an jedem Arbeitstage außer der Kost 45 kr. bezahlt werden sollten; daß er aber an jedem Tage, an welchem er nicht arbeitet, 15 kr. für die Kost geben wollte. Nach Verlauf der 60 Tage bekömmt er 24 fl. Man fragt, wie viele Tage er gearbeitet habe?

Auflösung. Nennt man die Zahl der Arbeitstage x, so ist die Zahl der Feyertage $60 - x$. Drückt man sowohl den Gewinn als Verlust durch Gulden aus, so verdiente der Künstler an sämmtlichen Arbeitstagen $\frac{3}{4} \times x$ oder $\frac{3x}{4}$, und sein Ver-

lust für sämmtliche Feyertage ist $\frac{1}{4} \times (60 - x)$ oder $\frac{60 - x}{4}$.
Wird nun das, was der Künstler nach 60 Tagen zahlen mußte, von seinem Verdienste abgezogen, so beträgt dieses, vermöge der Aufgabe 24 fl. Folglich entsteht die Gleichung

$$\frac{3x}{4} - \frac{60 - x}{4} = 24, \text{ oder}$$

$$\frac{3x}{4} - 15 + \frac{x}{4} = 24, \text{ folglich}$$

$$\frac{3x}{4} + \frac{x}{4} - 15 = 24, \text{ oder}$$

$$x - 15 = 24, \text{ folglich}$$

$$x = 24 + 15 = 39.$$

Demnach hat der Künstler 39 Tage gearbeitet und 60 — 39, oder 21 Tage gefeyert.

Probe. Da er an jedem Arbeitstage $\frac{3}{4}$ fl. erhielt, so war die Summe seines Verdienstes $= \frac{3}{4} \times 39 = \frac{117}{4}$ fl.; da er für jeden Feyertag $\frac{1}{4}$ fl. zahlen mußte, so mußte er für 21 Feyertage $\frac{1}{4} \times 21 = \frac{21}{4}$ fl. zahlen. Nun ist $\frac{117}{4} - \frac{21}{4} = \frac{117 - 21}{4} = \frac{96}{4} = 24$.

§. 71.

VII. Aufgabe. Ein Leinwandhändler übernahm zweyerley Gattung Leinwand zu liefern, und er weiß, 1.) die Summe der zu liefernden Stücke; 2.) den Preis jeder Gattung und 3.) den ganzen Geldbetrag. Es ist ihm aber entfallen,

wie viele Stücke von der ersten, und wie viele Stücke von der zweyten Gattung geliefert werden sollten. Dieses soll gefunden werden.

Auflösung. Es sey die Zahl der zu liefernden Stücke ... $= a$, die Zahl der Stücke von der ersten Gattung heiße $= x$, folglich ist die Zahl der Stücke von der andern Art .. .. $= a - x$.

Es sey der Preis eines Stücks der ersten Art ..... $= b$, und jener eines Stücks der zweyten Art .... $= c$, Daher ist der Preis aller Stücke der ersten Art ..... $= bx$ der Preis aller Stücke der zweyten Art aber .... $= ac - cx$ Der Geldertrag für die ganze Bestellung sey ...... $= d$

Aus der Bedingung der Aufgabe entspringt folgende Gleichung:

$$bx + ac - cx = d \text{ also}$$

$$bx - cx = d - ac \text{ oder}$$

$$(b-c)x = d - ac \text{ und endlich}$$

$$x = \frac{d - ac}{b - c}.$$

Da dieser Ausdruck für x ganz allgemein ist, so begreift er eine unzählige Menge einzelner Fälle unter sich.

Beyspiel. Es sey $a = 134$ Stück, $b = 11$ fl., $c = 9$ fl., $d = 1320$ fl., so wird $x = \frac{1320 - 134 \times 9}{11 - 9} = \frac{1320 - 1206}{2} = \frac{114}{2} = 57$. Also sollen 57 Stücke von der ersten, und $134 - 57$, oder 77 Stücke von der zweyten Art geliefert werden.

Probe. Der Geldertrag für die 57 Stücke von der ersten Art ist $= 57 \times 11 = 627$ fl.; und jener der 77 Stücke der andern Art ist $= 77 \times 9 = 693$ fl. Nun ist auch $627 + 693 = 1320$.

§. 72.

VIII. Aufgabe. Ein Kaufmann braucht zur Erhaltung seines Hauswesens jährlich 100 Louisd'or. Wenn er diese zu Anfang jedes Jahrs von der Masse seines Vermögens wegnahm, so ergab sich, daß das Uebrige um ein Drittheil vermehrt war. Nach drey Jahren hatte sich sein Vermögen verdoppelt; es fragt sich: wie groß war das Kapital im Anfange?

Auflösung. 1) Das Kapital, womit der Kaufmann zu handeln anfing, sey $= x$ Louisd'or.

2) Davon zog er zu Anfange des ersten Jahrs 100 Louisd'or für sein Hauswesen ab, und es blieben also $x - 100$.

3) Diesen Rest vermehrte er während des ersten Jahrs mit dem dritten Theil. Mit Ende desselben war also sein Vermögen

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{3x - 300 + x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}.$$

4) Mit Anfang des zweyten Jahrs zieht er wieder 100 Louisd'or davon ab, und es blieb ihm zur Handlung $\frac{4x - 400}{3}$

$$- 100 = \frac{4x - 700}{3}.$$

5) Dieses Vermögen wurde im zweyten Jahre wieder um $\frac{1}{3}$ vermehrt, und war also mit Ende desselben

$$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{12x - 2100 + 4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}.$$

6) Davon gehen zu Anfang des dritten Jahrs wieder 100 Louisd'or ab, und es blieben also

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}.$$

7) Dieser Rest wird während des dritten Jahrs wieder um $\frac{1}{3}$ vermehrt, und giebt also $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$

$$= \frac{48x - 11100 + 16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}.$$

8) Da nun durch diese Veränderungen das Kapital verdoppelt worden ist, so entsteht hieraus die Gleichung

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x \text{ also}$$

$$64x - 14800 = 54x \text{ daher}$$

$$64x - 54x = 14800 \text{ oder}$$

$$10x = 14800 \text{ also}$$

$$x = \frac{14800}{10} = 1480 \text{ Louisd'or.}$$

Probe. Von diesen 1480 gingen zu Anfange des ersten Jahrs 100 ab, und es blieben 1380, diese wurden im ersten Jahre um $\frac{1}{3}$ vermehrt, gaben also zu Ende desselben $1380 + 460 = 1840$. Von diesen wurden zu Anfang des zweyten Jahrs 100 genommen, und es blieben noch 1740, welche in diesem Jahre um $\frac{1}{3}$ oder 580 vermehrt wurden, und am Ende desselben eine Summe von 2320 gaben. Zu Anfang des dritten Jahrs gingen wieder 100 ab, und es blieben noch 2220, welche wieder mit $\frac{1}{3}$ oder 740 vermehrt, am Schlusse des dritten Jahrs eine Summe von $2220 + 740 = 2960$

gaben, welche das Doppelte der anfänglichen Summe 1480 ist.

§. 73.

IX. Aufgabe. Aus den gegebenen Geschwindigkeiten zweyer Körper, die sich gleichförmig *) nach einerley Richtung bewegen, und der Zeit, während welcher der erstere in Bewegung ist, bis der andere geschwindere in Bewegung gesetzt wird; die Zeit zu finden, wann der zweyte den ersten einholen wird.

Auflösung. Die Geschwindigkeit des ersten sey a, jene des zweyten b, die Zeit, um welche die Bewegung des letztern später anfängt, als jene des ersten, sey c, die Zeit von dem Anfange der Bewegung des letztern bis er den ersten erreicht x. Da man den Raum durch ein Product aus der Geschwindigkeit in die Zeit bestimmen kann, so ist der Raum, welchen der erste zurückgelegt hat, bis der letztere in Bewegung kömmt, $= ac$, und der Raum, welchen er noch zurücklegt, bis ihn der andere erreichet, $= ax$. Auch ist der Raum des geschwinderen $= bx$; da nun dieser letzte Raum den beyden erstern gleich seyn muß, so hat man die Gleichung:

$$bx = ac + ax, \text{ folglich}$$

$$bx - ax = ac, \text{ oder } (b-a)x = ac, \text{ und}$$

$$x = \frac{ac}{b-a}.$$

Beyspiel und Probe. Gesetzt $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, so ist $x = \frac{2 \times 9}{3-2} = 18$. Wenn hier $a = 2$ Schu-

*) Ein Körper bewegt sich gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt.

he, $b = 3$ Schuhe und $c = 9$ Secunden wäre, so hätte man $x = 18$ Secunden. Der zweyte Körper hätte binnen dieser Zeit einen Raum von 18×3 oder von 54 Fuß, und der erstere einen Raum von $2 \times 9 + 2 \times 18 = 18 + 36$ d. h. ebenfalls von 54 Fuß zurückgelegt.

§. 74.

X. Aufgabe. Zwey Boten gehen mit gleichförmiger Bewegung gegeneinander. Man weiß die Entfernung der Orte, von welchen sie ausgehen, die Tagreise eines jeden und die Zeit, um welche der eine früher als der andere abgeht. Man sucht die Zeit ihres Zusammentreffens.

Auflösung. Die Zeit, um welche der erste früher abgeht, als der zweyte, sey $= a$, dessen Tagreise $= b$. Es sey ferner die Tagreise des zweyten $= b + n$ (oder auch $b - n$), die Entfernung der Orte $= d$. Die Zeit von Anfang der Abreise des zweyten bis zur Zusammenkunft heiße x, so ist die Zeit der Reise des ersten $= a + x$ und der von ihm zurückgelegte Raum $= (a + x)\, b = ab + bx$. Eben so ist der zurückgelegte Weg des zweyten $= (b + n)\, x = bx + nx$. Da nun nach der Natur der Sache die Summe beyder Wege der Entfernung beyder Orte gleich seyn muß, so entsteht die Gleichung:

$$ab + bx + bx + nx = d, \text{ oder}$$

$$ab + 2bx + nx = d \text{ folglich}$$

$$2bx + nx = d - ab \text{ oder}$$

$$(2b + n)\, x = d - ab \text{ daher}$$

$$x = \frac{d - ab}{2b + n}$$

Beyspiel und Probe. Es sey $a = 3$, $b = 5$, $n = 1$, $d = 92$, so wird $x = \frac{92 - 3 \times 5}{2 \times 5 + 1} = \frac{92 - 15}{11} = \frac{77}{11} = 7$. Hier ist nun auch

$$3 \times 5 + 2 \times 5 \times 7 + 1 \times 7 = 92.$$

§. 75.

Zusatz. Nimmt man an, daß die zwey Boten zu gleicher Zeit ausgehen, so ist $a = 0$, und die Formel $x = \frac{d - ab}{2b + n}$ wird nun in folgende $x = \frac{d - 0b}{2b + n}$, d. h. in $x = \frac{d}{2b + n}$ verwandelt.

Beyspiel nebst Probe. Behalten die Buchstaben die Werthe des vor. §., so wird $x = \frac{92}{2 \times 5 + 1} = \frac{92}{11} = 8\frac{4}{11}$. Auch ist hier wieder $2bx + nx = d$, oder $10 \times \frac{92}{11} + \frac{92}{11} = 11 \times \frac{92}{11} = 92$.

§. 76.

Zusatz. Nimmt man die Zeit der Zusammenkunft als bekannt an, und will die Tagreise des ersten hieraus finden, so bestimme man in der obigen Gleichung $ab + 2bx + nx = d$, die Größe b durch a, n, d und das nun als bekannt angenommene x. Hierdurch wird

$$ab + 2bx = d - nx \text{ folglich}$$

$$(a + 2x)\, b = d - nx, \text{ und}$$

$$b = \frac{d - nx}{a + 2x}.$$

Beyspiel. Nach der bisherigen Bedeutung der Buchstaben wird $b = \frac{92 - 1 \times 7}{3 + 14} = \frac{85}{17} = 5$, wie oben angenommen wurde.

§. 77.

Zusatz. Sollte man aus allen übrigen Werthen der Gleichung den Unterschied der Tagreisen, oder n finden, so verführe man so:

$$ab + 2bx + nx = d \text{ (§. 76.) also}$$

$$nx = d - ab - 2bx$$

$$n = \frac{d - ab - 2bx}{x}, \text{ oder}$$

$$n = \frac{d - ab}{x} - 2b.$$

Beyspiel Mit Beybehaltung der bekannten Zahlen wird $n = \frac{92 - 3 \times 5}{7} - 2 \times 5$, oder $n = \frac{77}{7} - 10 = 11 - 10 = 1$, wie oben.

§. 78.

Zusatz. Desgleichen könnte man a, oder die Zeit finden, um welche der erste vor dem zweyten in Bewegung kam. Denn aus

$$ab + 2bx + nx = d, \text{ folgt}$$

$$ab = d - 2bx - nx \text{ also}$$

$$a = \frac{d - 2bx - nx}{b} \text{ oder}$$

$$a = \frac{d - nx}{b} - 2x.$$

Beyspiel. Hier ist:

$$a = \frac{92 - 1 \times 7}{5} - 2 \times 7 \text{ folglich}$$

$$a = \frac{85}{5} - 14 = 17 - 14 = 3, \text{ wie oben.}$$

§. 79.

XI. Aufgabe. *A*, *B*, und *C* werden zu Erben eines Vermögens von 12000 fl. mit der Bedingniß eingesetzt, daß *A* zur Hälfte, *B* zum Drittheil und *C* zum Viertheil erben solle. Wie viel bekömmt Jeder?

Auflösung. Da $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{26}{24} = 1\frac{1}{12}$ ist, so betragen die bestimmten Theile um $\frac{1}{12}$ mehr als das Ganze, und die Theilung kann nicht buchstäblich vollzogen werden. Es bleibt daher nichts übrig, als daß sich *A*, B und *C* nach dem Verhältniß von $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ in die Erbschaft theilen. Es kommt also hier darauf an, eine Zahl zu finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil zusammengenommen 12000 fl. beträgt. Dies giebt folgende Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12000, \text{ folglich}$$

$$\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = 12000, \text{ also}$$

$$\frac{26x}{24} = 12000, \text{ und}$$

$$26x = 24 \times 12000 \text{ daher}$$

$$x = \frac{24 \times 12000}{26} \text{ oder}$$

$$x = \frac{12 \times 12000}{13} = \frac{144000}{13} = 11076\tfrac{12}{13}.$$

Giebt man von dieser Zahl dem A die Hälfte, dem B ein Drittheil und dem C ein Viertheil, so muß ihre Summe 12000 betragen. Es ist nun $(11076\frac{12}{13}) : 2 = 5538\frac{6}{13}$; $(11076\frac{12}{13}) : 3 = 3692\frac{4}{13}$ und $(11076\frac{12}{13}) : 4 = 2769\frac{3}{13}$ und $5538\frac{6}{13} + 3692\frac{4}{13} + 2769\frac{3}{13} = 12000$.

§. 80.

XII. Aufgabe. Eine Frau bringt Garn zum Weber und verlangt 100 Ellen Tuch davon. Der Weber sagt, es seyen 5 Pfund zu wenig; aber für 80 Ellen seyen es 3 Pfund zu viel. Wie viel Pfunde Garn sind es gewesen, und wie viele Ellen gab ein Pfund?

Auflösung. Wenn man die zu findende Zahl der Pfunde Garn x nennt, so brauchte man zu 100 Ellen Tuch $x + 5$, und folglich zu einer Elle $\frac{x + 5}{100}$ Pfunde. Ferner brauchte man zu 80 Ellen $x - 3$, daher zu einer Elle $\frac{x - 3}{80}$ Pfunde. Es entsteht folglich die Gleichung:

$$\frac{x + 5}{100} = \frac{x - 3}{80}$$

$$x + 5 = \frac{100x - 300}{80}$$

$$80x + 400 = 100x - 300$$

$$400 + 300 = 100x - 80x$$

$$700 = 20x$$

$$\frac{700}{20} = x = 35.$$

Probe. Da es 35 Pfunde waren, so geben 35 + 5, oder 40 Pfunde 100 Ellen, so wie 35 — 3, oder 32 Pfunde 80 Ellen geben. Im ersten Falle giebt 1 Pfund $\frac{100}{4} = 2\frac{1}{2}$ Ellen und im letzten giebt 1 Pfund $\frac{80}{32}$ also ebenfalls $2\frac{1}{2}$ Ellen.

§. 81.

Anmerkung. Die bisher betrachteten Aufgaben haben nur eine unbekannte Größe enthalten. Oefters erfodert es die Natur der aufzulösenden Aufgabe, zwey, drey oder mehrere Unbekannte anzunehmen. Soll aber in diesen Fällen jedes derselben nur einen bestimmten Werth erhalten, so muß man aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen bilden können, als Unbekannte in derselben vorkommen. Kann dieses nicht geschehen, so haben die Unbekannten mehr als einen Werth. Beyspiele werden die Richtigkeit dieser Regeln deutlicher zeigen, als es hier mit blosen Worten geschehen kann.

II. Bestimmte Aufgaben mit zwey und drey Unbekannten.

§. 82.

I. Aufgabe. Aus der bekannten Summe zweyer Zahlen und ihrem Unterschiede die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Wenn man die größere Zahl x, die kleinere y, ihre Summe s und ihren Unterschied d heißt, so entstehen aus der Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$x + y = s \text{ (A) und}$$
$$x - y = d \text{ (B).}$$

Bestimmt man in beyden den Werth des **einen** Unbekannten z. B. von x, so wird aus (A)

$x = s - y$, und aus (B)

$x = d + y$, folglich ist auch

$$s - y = d + y$$

$$s - d = y + y = 2y$$

$$\frac{s - d}{2} = y \text{ (C) } = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

Um nun auch x zu finden, setze man den hier gefundenen Werth von y in eine der vorigen Gleichungen, z. B. in (A), so wird $x = s - \left(\frac{s - d}{2}\right)$

$$x = s - \frac{s + d}{2}$$

$$x = \frac{2s - s + d}{2}$$

$$x = \frac{s + d}{2} \text{ (D) } = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

Beyspiel. Es sey $s = 40$, $d = 16$, so ist nach (C)

$\frac{40 - 16}{2} = y$ oder

$$\frac{24}{2} = 12 = y$$

Und nach (D) wird

$\frac{40 + 16}{2} = x$, oder

$$\frac{56}{2} = 28 = x$$

Probe. Wirklich ist hier 28 + 12 = 40 und 28 — 12 = 16.

§. 83.

Zusatz. Durch vorige Aufgabe ist zugleich folgender allgemeine Lehrsatz bewiesen worden, dessen Richtigkeit aus den Gleichungen (C) und (D) erhellet. Er heißt: Wenn man den halben Unterschied zweyer Größen von ihrer halben Summe abzieht, so erhält man die kleinere; wenn man aber ihren halben Unterschied zur halben Summe addirt, so erhält man die größere von ihnen.

§. 84.

Anmerkung. I. In den Gleichungen (A) und (B) des §. 82. wurde zuerst der Werth von x bestimmt. Daß man auch den Anfang mit Bestimmung von y machen könne, soll in den Vorlesungen gezeigt werden; so wie auch, daß es einerley ist, in welche der beyden ersten Gleichungen für x und y man den bekannten Werth des einen einsetzen könne, um den andern zu finden.

§. 85.

Anmerkung. II. Obgleich das in dem vorhergehenden angegebene Verfahren, den Werth von x und y zu bestimmen, ganz allgemein ist, so giebt es sowohl hier, als in andern ähnlichen Fällen bisweilen kürzere Mittel dazu. Denn wenn man die beyden Hauptgleichungen (A) und (B) (in §. 82.) zusammen addirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x + y = s \\ x - y = d \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$2x = s + d \text{ folglich}$$

$$x = \frac{s + d}{2}, \text{ wie oben.}$$

Werden sie aber von einander subtrahirt, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} x + y = s \\ x - y = d \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$2y = s - d \text{ daher}$$

$$y = \frac{s - d}{2}, \text{ wie oben.}$$

§. 86.

II. Aufgabe. Es hat jemand zwey Becher nebst einem Deckel, der 18 fl. werth ist. Wird dieser auf den ersten Becher gesetzt, so ist er noch einmal so viel werth, als der zweyte; wird er aber auf den zweyten gesetzt, so ist dieser um ein Viertel mehr werth als der erste. Wie viel ist jeder werth?

Auflösung. Der Werth des ersten sey x, des zweyten y. Setzt man den Deckel auf den ersten, so ist sein Werth $= x + 18$, und da dieser nun noch einmal so groß seyn soll, als der Werth des andern Bechers, so hat man die Gleichung

$$x + 18 = 2y \text{ (A).}$$

Setzt man den Deckel auf den zweyten Becher, so ist sein Werth $y + 18$, und da der zweyte dann um $\frac{1}{4}$ mehr werth seyn soll, als der erste, so ist die zweyte Gleichung

$$y + 18 = x + \frac{x}{4} \text{ (B)}$$

Bestimmt man nun sowohl in (A) als in (B) den Werth eines Unbekannten, z. B. von x, so wird aus (A)

$$x = 2y - 18 \text{ (C)}.$$

Und aus (B) entsteht

$$4y + 72 = 4x + x = 5x$$

$$\frac{4y + 72}{5} = x \text{ (D)}.$$

Setzt man die zwey Werthe für x in (C) und (D) gleich, so wird $2y - 18 = \frac{4y + 72}{5}$

$$10y - 90 = 4y + 72$$

$$10y - 4y = 90 + 72$$

$$6y = 162$$

$$y = 27.$$

Setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (C), so wird $x = 2 \times 27 - 18$ folglich

$$x = 54 - 18 = 36.$$

Probe. Werden diese Zahlenwerthe in die Gleichungen (A) und (B) gesetzt, so findet man

I. $36 + 18 = 2 \times 27$, und

II. $27 + 18 = 36 + \frac{36}{4}$, daher sind die Foderungen der Aufgabe erfüllt.

§. 87.

Anmerkung I. Auch hier hätte man in den beyden Hauptgleichungen (A) und (B §. 86.) zuerst beyderseits y bestimmen, und dann den aus der neuen Verbindungsglei-

chung erhaltenen Werth von x in jede der ersten Gleichungen einsetzen können. Diese Uebung ist lehrreich für Anfänger.

§. 88.

Anmerkung II. Um die vorhergehende Aufgabe ganz allgemein aufzulösen, wo sie sich auf sehr viele andere Fälle anwenden läßt, setze man den Werth des Deckels $= a$, und das, was vorhin $\frac{1}{4}$ war, sey nun $\frac{1}{n}$. Jetzt wird die Gleichung (A) in folgende verwandelt,

$x + a = 2y$ (α) und aus (B) wird nunmehr

$$y + a = x + \frac{x}{n} \ (\beta)$$

Bestimmt man in beyden den Werth von y, so wird aus (α) $\frac{x + a}{2} = y$ (γ) und aus (β) erhält man

$$y = x + \frac{x}{n} - a \ (\delta)$$

Diese Werthe von y gleichgesetzt, giebt

$$\frac{x + a}{2} = x + \frac{x}{n} - a$$

$$x + a = 2x + \frac{2x}{n} - 2a$$

$$nx + an = 2nx + 2x - 2an$$

$$2an + an = 2nx - nx + 2x$$

$$3an = nx + 2x$$

$$3an = (n + 2)\,x$$

$$\frac{3an}{n + 2} = x$$

Um nun auch einen Ausdruck für y zu finden, setze man den Werth von x in die Gleichung (γ), so erhält man aus

$$\frac{x}{2} + \frac{a}{2} = y, \text{ nunmehr}$$

$$\frac{3an}{2n+4} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{6an + 2an + 4a}{4n+8} = y$$

$$\frac{8an + 4a}{4n+8} = y$$

$$\frac{2an + a}{n+2} = y$$

Von der Anwendung dieser Aufgabe auf andere Fälle in den Vorlesungen.

§. 89.

III. Aufgabe. A will seinem Nachbar B zwey Morgen Land abkaufen. B erwiedert, alsdann würde A noch einmal so viele Morgen haben, als er. Wollte ihm aber A zwey Morgen von den seinigen verkaufen, so hätten sie beyde gleichviel. Wie viele Morgen hatte Jeder?

Auflösung. Die Anzahl der Morgen des A heiße x, jene des B sey y. Aus der ersten Bedingung der Aufgabe entsteht die Gleichung

$$x + 2 = 2(y - 2) \text{ (A)}.$$

und aus der zweyten wird

$$x - 2 = y + 2 \text{ (B)}$$

Bestimmt man in jeder Gleichung den Werth irgend eines Unbekannten, z. B. von y, so wird aus (A)

$$x + 2 = 2y - 4$$

$$x + 2 + 4 = 2y$$

$$\frac{x + 6}{2} = y \text{ (C)}$$

Aus (B) erhält man

$$x - 2 - 2 = y \text{ oder}$$

$$x - 4 = y \text{ (D)}$$

Beyde Werthe in (C) und (D) gleichgesetzt, giebt

$$\frac{x + 6}{2} = x - 4$$

$$x + 6 = 2x - 8$$

$$8 + 6 = 2x - x = x$$

$$14 = x$$

Substituirt man diesen Zahlenwerth in (D), so wird

$$14 - 4 = 10 = y.$$

Probe. Da der A 14 Morgen und der B 10 Morgen hatte, so ist

I.) $14 + 2 = 2(10 - 2) = 16$, und
II.) $14 - 2 = 10 + 2 = 12$.

§. 90.

IV. Aufgabe. Man soll drey Zahlen finden, von welchen die erste, nebst der Hälfte der zwey andern $= A$, die

zweyte, nebst dem dritten Theil der zwey andern $= B$, und die dritte, nebst dem vierten Theil der andern $= C$ ist.

Auflösung. Nennt man die drey zu findenden Zahlen x, y und z, so giebt die Aufgabe folgende drey Hauptgleichungen:

$$x + \frac{y + z}{2} = A \text{ (I)}$$

$$y + \frac{x + z}{3} = B \text{ (II), und}$$

$$z + \frac{x + y}{4} = C \text{ (III).}$$

Bestimmt man in jeder derselben den Werth eines beliebigen Unbekannten; z. B. den Werth von z, so erhält man durch eine leichte Rechnung

$$z = 2A - 2x - y \text{ (IV)}$$

$$z = 3B - 3y - x \text{ (V) und}$$

$$z = \frac{4C - x - y}{4} \text{ (VI)}$$

Setzt man die Werthe in (IV) und (V) und jene in (IV) und (VI) einander gleich, so wird

$$2A - 2x - y = 3B - 3y - x \text{ (VII) und}$$

$$2A - 2x - y = \frac{4C - x - y}{4} \text{ (VIII).}$$

Da diese beyde Gleichungen nur zwey unbekannte Größen enthalten, so bestimme man in jeder irgend eine davon. Für y ergeben sich, nach vollbrachter Rechnung, folgende Werthe

$$y = \frac{3B - 2A + x}{2} \text{ (IX) und}$$

$$y = \frac{8A - 7x - 4C}{3} \text{ (X)}$$

Bringt man nun auch diese zwey Ausdrücke für y (IX und X) in eine Gleichung, so wird

$$\frac{3B - 2A + x}{2} = \frac{8A - 7x - 4C}{3} \quad \text{(XI)}$$

Da diese letzte Gleichung nur ein Unbekanntes enthält, so läßt sich der Werth von x leicht bestimmen. Nach gehöriger Rechnung erhält man

$$x = \frac{22A - 8C - 9B}{17} \quad \text{(XII)}$$

Substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung (IX), so ergiebt sich

$$y = \frac{21B - 6A - 4C}{17} \quad \text{(XIII)}$$

Werden endlich beyde Werthe von x und y in die Gleichung (IV) gebracht, so findet man

$$z = \frac{20C - 3B - 4A}{17} \quad \text{(XIV)}$$

Folglich sind die drey Unbekannte x, y und z in bekannten Zahlen bestimmt.

Allgemeine Probe. Diese wird gemacht, wenn man die hier gefundenen Werthe von x, y und z in die Gleichungen (I), (II) und (III) setzt. Nach I ist

$$\frac{22A - 8C - 9B}{17} + \frac{1}{2}\left(\frac{21B - 6A - 4C + 20C - 3B - 4A}{17}\right) = \frac{22A - 8C - 9B}{17} + \frac{1}{2}\left(\frac{18B - 10A + 16C}{17}\right) = \frac{22A - 8C - 9B + 9B - 5A + 8C}{17} = \frac{17A}{17} = A.$$

Auf gleiche Weise kann auch die Probe für die Gleichungen (II) und (III) gemacht werden.

Beyspiel. Setzt man $A = 4$, $B = 3$ und $C = 2$, so wird

$$x = \frac{22 \times 4 - 8 \times 2 - 9 \times 3}{17} = \frac{45}{17},$$

$$y = \frac{21 \times 3 - 6 \times 4 - 4 \times 2}{17} = \frac{31}{17}, \text{ und}$$

$$z = \frac{20 \times 2 - 3 \times 3 - 4 \times 4}{17} = \frac{15}{17}.$$

Probe. Hier wird

$$1)\ \frac{45}{17} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{31}{17} + \frac{15}{17}\right) = 4,$$

$$2)\ \frac{31}{17} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{45}{17} + \frac{15}{17}\right) = 3, \text{ und}$$

$$3)\ \frac{15}{17} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{45}{17} + \frac{31}{17}\right) = 2.$$

§. 91.

Allgemeiner Zusatz. Aus der bisherigen Theorie und Praxis der algebraischen Aufgaben ergiebt sich die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes: Wenn man aus den Bedingungen einer Aufgabe so viele besondere Gleichungen bilden kann, als unbekannte Größen in ihr vorkommen, so erhält jedes dieser Unbekannten nur einen bestimmten Werth, und die Aufgabe ist eine bestimmte. Da nun öfters auch Fälle vorkommen, wo man eine Gleichung weniger hat, als die Zahl der unbekannten Größen beträgt, so sollen die

allgemeinsten Regeln zur Auflösung dieser Aufgaben nun in mehreren Beyspielen angeführt werden. Dies giebt die Lehre von den unbestimmten Aufgaben.

III. Unbestimmte Aufgaben.

§. 92.

I. Aufgabe. Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe $= 8$ ist.

Auflösung. Nennt man die zu findenden Zahlen x und y, so läßt sich nur folgende Gleichung bilden:

$$x + y = 8, \text{ woraus}$$

$$x = 8 - y \text{ folget.}$$

Da nun x hier durch die Zahl 8 und die unbekannte Größe y bestimmt ist, so sieht man, daß x verschiedene Werthe haben wird, je nachdem man für y verschiedene setzt. Giebt man aber diesem y verschiedene willkührliche Werthe, so wird auch x mehrere Werthe erhalten. Wenn man voraussetzt, daß x eine ganze und positive Größe seyn soll, so sind die für y zu setzendem willkührlichen Werthe bestimmt. Nämlich:

für $y = 1$ oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6, oder 7,
wird $x = 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$.

Dürfte hingegen x eine gebrochene Zahl, oder eine negative seyn, so könnte man für x unzählig viele Werthe erhalten.

§. 93.

II. Aufgabe. Es sollen 360 Morgen Feld in 22 Grundstücke getheilt werden, welche theils 24 Morgen, theils 12 und zum Theil 6 Morgen enthalten.

Auflösung. Die Zahl der Stücke von 24 Morgen sey x, jene der Stücke von 12 Morgen y und jene von 6 Morgen z, so entsteht zuerst folgende Gleichung

$$x + y + z = 22. \quad (A)$$

Da nun $24x$, $12y$ und $6z$ die Zahl der Morgen bedeuten, welche in allen 24, 12 und 6 Morgenstücken enthalten sind, so hat man eine zweyte Gleichung

$$24x + 12y + 6z = 360 \quad (B).$$

Mit diesen zwey Gleichungen sind die sämmtlichen Bedingnisse der Aufgabe erschöpft. Es lassen sich daher für die drey Unbekannte keine drey bestimmte Werthe finden. Bestimmt man nun in jeder der obigen Hauptgleichungen den Werth eines Unbekannten z. B. von x, so wird aus (A)

$$x = 22 - y - z \quad (C).$$

und aus (B) ist

$$x = \frac{360 - 12y - 6z}{24} \text{ oder}$$

$$x = \frac{60 - 2y - z}{4} \quad (D)$$

Die Werthe in (C) und (D) gleichgesetzt giebt

$$22 - y - z = \frac{60 - 2y - z}{4} \quad (E)$$

Bestimmt man hier y, so erhält man

$$88 - 4y - 4z = 60 - 2y - z$$

$$88 - 60 - 4z + z = 4y - 2y$$

$$28 - 3z = 2y$$

$$\frac{28 - 3z}{2} = y$$

$$14 - \frac{3z}{2} = y \quad (F)$$

Setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (C), so ergiebt sich

$$x = 22 - \left(14 - \frac{3z}{2}\right) - z$$

$$x = 22 - 14 + \frac{3z}{2} - z$$

$$2x = 44 - 28 + 3z - 2z$$

$$2x = 16 + z$$

$$x = 8 + \frac{z}{2} \quad (G)$$

Sollen nun die Werthe für x, y und z ganze und positive Zahlen seyn, wie es die Bedingnisse obiger Aufgabe voraussetzen, so wird sich aus den Gleichungen (F) und (G) bestimmen lassen, was man für z setzen könne, damit x und y dieser Foderung entsprechen. Aus (F) ergiebt es sich, daß man höchstens $z = 8$ nehmen dürfe. Hierdurch wird $\frac{3z}{2} = 12$ und $y = 2$. Die möglichen Werthe für z und die dadurch bestimmten Werthe für y und x sind also folgende:

für $z = 8$ wird $y = 2$ und $x = 12$,
— $z = 6$ — $y = 5$ — $x = 11$,
— $z = 4$ — $y = 8$ — $x = 10$,
— $z = 2$ — $y = 11$ — $x = 9$.

Probe. Diese besteht darin, daß jedesmal

$x + y + z = 22$, und
$24x + 12y + 6z = 360$ seyn muß.

§. 94.

Anmerkung. In der vorigen Auflösung wurde zuerst die unbekannte Größe x bestimmt. Dies war eben nicht nothwendig, sondern man könnte auch mit y oder z den Anfang machen und würde am Ende die nämlichen Werthe erhalten haben. Es ist sehr zu rathen, diese Uebung mit den Anfängern vorzunehmen, damit sie eine deutlichere Einsicht in die Natur der algebraischen Auflösungen erlangen. Ausser diesem einen Hauptfalle lassen sich noch mehrere besondere Fälle denken, wobey Abwechslungen vorkommen, welche in den Vorlesungen erläutert werden.

§. 95.

III. Aufgabe. Dreyßig Personen, worunter sich Männer, Weiber und Kinder befinden, verzehren zusammen 50 fl. Jeder Mann zahlte 3 fl., jede Frau 2 fl., jedes Kind 1 fl. Wie viele Männer, Weiber und Kinder waren es?

Auflösung. Nennt man die Anzahl der Männer x, jene der Weiber y und der Kinder z, so giebt die Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$x + y + z = 30 \text{ (A) und}$$
$$3x + 2y + z = 50 \text{ (B)}.$$

Bestimmt man aus (A) und (B) den Werth von z, so ergiebt sich aus jener

$$z = 30 - x - y \text{ (C), aus dieser}$$
$$z = 50 - 3x - 2y \text{ (D)}$$

Werden beyde Werthe von z gleichgesetzt, so ist:

$$30 - x - y = 50 - 3x - 2y \text{ (E)}$$

Bestimmt man hier das Unbekannte y, so ist die Gleichung diese:

$$2y - y = 50 - 30 - 3x + x$$

$$y = 20 - 2x \ (F)$$

Soll nun y eine ganze und positive Zahl seyn, wie dies in obiger Aufgabe der Fall seyn muß, so folget aus (F), daß x nicht $>$ 10 seyn darf. Da es nun auch nicht $<$ 1 seyn kann, so ergeben sich folgende Fälle:

Für $x = 1$ wird $y = 18$ und $z = 11$
— $x = 2$ — $y = 16$ — $z = 12$
— $x = 3$ — $y = 14$ — $z = 13$
— $x = 4$ — $y = 12$ — $z = 14$
— $x = 5$ — $y = 10$ — $z = 15$
— $x = 6$ — $y = 8$ — $z = 16$
— $x = 7$ — $y = 6$ — $z = 17$
— $x = 8$ — $y = 4$ — $z = 18$
— $x = 9$ — $y = 2$ — $z = 19$.

Probe. Diese besteht darin, daß für alle Werthe der gefundenen Größen

I.) $x + y + z = 30$ und

II.) $3x + 2y + z = 50$ ist.

§. 96.

Anmerkung. Die Uebung des §. 94. kann auch hier sehr zweckmäßig angebracht werden.

§. 97.

IV. Aufgabe. Von vier Weinsorten, wovon die Maaß 4 fl., 2 fl., 1 fl. und ½ fl. kostet, sollen 20 Maaß für 20 fl. gekauft werden. Auf wie vielerley Art ist dies möglich?

Auflösung. Nennt man die Zahl der Maaße der 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Sorte w, x, y und z, so giebt die Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$4w + 2x + y + \tfrac{1}{2} z = 20 \quad (A)$$
$$w + x + y + z = 20 \quad (B)$$

Wird die zweyte von der ersten abgezogen, so erhält man

$$3w + x - \tfrac{1}{2} z = 0 \ (C) \text{ woraus}$$

$$3w + x = \frac{z}{2}$$

$$6w + 2x = z \ (D)$$

Nun wird aus (A)

$y = 20 - 4w - 2x - \frac{1}{2} z$, oder, durch Substitution des in (D) gefundenen Werthes von z,

$$y = 20 - 4w - 2x - 3w - x$$

$$y = 20 - 7w - 3x$$

$$y = 20 - (7w + 3x) \ (E)$$

Wenn nun, wie vorausgesetzt wird, y eine ganze und positive Zahl seyn soll, so folget aus (E) daß $7w + 3x < 20$ genommen werde. Nimmt man daher für w und x die kleinsten Zahlenwerthe, die möglich sind, und bestimmt hiernach das unbekannte y in (E) und z in (D), so erhält man folgende mögliche Fälle:

Für $w = 1$ und $x = 1$ wird $y = 10$ und $z = 8$
— $w = 1$ — $x = 2$ — $y = 7$ — $z = 10$
— $w = 1$ — $x = 3$ — $y = 4$ — $z = 12$
— $w = 1$ — $x = 4$ — $y = 1$ — $z = 14$
— $w = 2$ — $x = 1$ — $y = 3$ — $z = 14$
— $w = 2$ — $x = 2$ — $y = 0$ — $z = 16$

dieser letzte Fall kann nicht Statt finden, weil er die Anzahl der Maaße zu 1 fl. ausschließet.

Probe. Diese ist in den beyden Gleichungen (A) und (B) enthalten und kann für jeden der obigen fünf Fälle leicht nachgerechnet werden.

§. 98.

V. Aufgabe. Drey Krämer verkaufen Tuch; *A* 27 Ellen, *B* 34 Ellen und *C* 41 Ellen. Keiner verkauft die Elle theurer, als der andere, und als alle ihr Tuch verkauft hatten, traf sich's, daß jeder gerade so viel eingenommen hatte, als der Andere.

Auflösung. 1) Der Fall ist unmöglich, wenn man nicht annimmt, daß sie mehrmals an dem Tuche verkauft haben, und zwar das erstemal z. B. theurer, als das zweytemal.

2) Es sey daher der Preis einer Elle am ersten Tage $= m$, am zweyten Tage $= n$. Ferner habe *A* für m verkauft x Ellen, so hat er das anderemal für n verkauft $27 - x$ Ellen und sein eingenommenes Geld ist $= mx + 27n - nx = (m - n)\,x + 27n$.

3) *B* habe für m verkauft y Ellen, so hat er für n verkauft $34 - y$ Ellen und seine sämmtliche Einnahme ist $= my + 34n - ny = (m - n)\,y + 34n$.

4) *C* habe für m verkauft z Ellen, so hat er für n verkauft $41 - z$ Ellen und der ganze Ertrag dafür ist $= mz + 41n - nz = (m - n)\,z + 41n$.

5) Da nun der Erlöß in allen drey Fällen der nämliche war, so hat man (aus 2 und 3)

$$(m - n)x + 27n = (m - n)y + 34n$$

$$(m - n)x = (m - n)y + 7n.$$

$$x = y + \frac{7n}{m - n} \text{ (A)}$$

desgleichen wird (aus 3 und 4)

$$(m - n)y + 34n = (m - n)z + 41n$$

$$(m - n)y = (m - n)z + 7n$$

$$y = z + \frac{7n}{m - n} \text{ (B)}$$

6) In den Gleichungen (A) und (B) müßen für m und n beliebige Werthe gesetzt werden, welche aber, wenn man zum Resultate keine Brüche haben will, so gewählt werden müßen, daß $m - n$ in $7n$ ohne Rest aufgehe, oder daß $\frac{n}{m - n}$ eine ganze Zahl sey.

7) Nimmt man z. B. $m = 2$, $n = 1$, so wird

$$\frac{n}{m - n} = 1, \text{ folglich } \frac{7n}{m - n} = 7.$$

8) Da nun der kleinste Werth, welchen z haben kann, $= 1$ ist, so ist aus (B) der kleinste Werth für $y = 1 + 7 = 8$ und der kleinste Werth für x aus (A) $= 8 + 7 = 15$.

9) Fährt man fort $z = 2$; $z = 3$; $z = 4$ u. s. f. zu setzen, so werden für y und x die größten Werthe gefunden, wenn $z = 13$ ist, denn nun wird $y = 13 + 7 = 20$, und $x = 20 + 7 = 27$. Wollte man $z = 14$ nehmen, so würde $y = 14 + 7 = 21$ und $x = 21 + 7 = 28$. Da nun der Krämer A nur 27 Ellen Tuch hat, so ist dieser letzte Fall unmöglich.

10) Die Zahl der möglichen Fälle wird folglich (für die Annahme $m = 2$, $n = 1$) auf folgende dreizehn beschränkt:

für	$z = 1$ wird	$y =$	8, und	$x =$	15
=	2	——	9	——	16
=	3	——	10	——	17
=	4	——	11	——	18
=	5	——	12	——	19
=	6	——	13	——	20
=	7	——	14	——	21
=	8	——	15	——	22
=	9	——	16	——	23
=	10	——	17	——	24
=	11	——	18	——	25
=	12	——	19	——	26
=	13	——	20	——	27.

11) Die Probe ist leicht anzustellen. Für den ersten Fall verkauft

A	zuerst	15 Ellen für 2 fl.	= 30 fl.
	hernach	12 Ellen für 1 fl.	= 12 fl.
		27 Ellen für ——	42 fl.
B	zuerst	8 Ellen für 2 fl.	= 16 fl.
	hernach	26 Ellen für 1 fl.	= 26 fl.
		34 Ellen für ——	42 fl.
C	zuerst	1 Elle für 2 fl.	= 2 fl.
	hernach	40 Ellen für 1 fl.	= 40 fl.
		41 Ellen für ——	42 fl.

12) Wenn man für m und n andere Zahlen setzt, so erhält man für beliebige z, wieder andere Werthe von y und x.

§. 99.

Anmerkung. So viel von den niedern Gleichungen. Von den höhern betrachten wir nur die quadratischen, welche (nach §. 56.) theils reine, theils unreine oder vermischte sind. Von beyden soll nun kürzlich gehandelt werden.

IV. Quadratische Gleichungen.

§. 100.

Aufgabe. Die Gründe zur Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen zu entwickeln.

Auflösung. 1) Aus dem Begriffe dieser Gleichungen folget, daß ihre allgemeine Form diese ist $x^2 = a$, woraus denn $x = \sqrt{a}$ wird. Da nun sowohl $+ a \times + a$, als auch $- a \times - a$ zum Producte $+ a^2$ giebt (§. 21), so hat x einen doppelten Werth; nämlich $x = + \sqrt{a}$ und $x = - \sqrt{a}$, welches man auch so schreibt $x = \pm \sqrt{a}$.

2) Wäre z. B. $nx^2 = m$, so hätte man $x^2 = \frac{m}{n}$ und $x = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}$. Dieser Werth von x kann entweder rational seyn oder irrational, jenachdem $\frac{m}{n}$ ein vollkommenes Quadrat ist, oder nicht. Wäre aber $\frac{m}{n}$ eine negative Größe und folglich $x = \pm \sqrt{- \frac{m}{n}}$, so nennt man x eine unmögliche, imaginäre oder eingebildete Größe, weil ein negatives Quadrat ein Unding ist.

3) Wenn alle Glieder der Gleichung entweder x^2 oder x enthalten, so dividire man sie alle mit x, und man erhält eine einfache Gleichung.

Z. B. $ax^2 + x = bx^2 + cx$

$$ax + 1 = bx + c$$

$$ax - bx = c - 1$$

$$(a - b)\,x = c - 1$$

$$x = \frac{c - 1}{a - b}.$$

4) Wenn zwey unbekannte Größen auf der zweyten Potenz stehen und auch zwey Gleichungen erhalten werden, so hat jedes der Unbekannten nur einen bestimmten Werth. Z. B.

Es sey $x^2 = a - 2y^2$ (A) und
$x^2 + y^2 = b$ (B)

Aus (B) wird sogleich $x^2 = b - y^2$ (C), folglich (A) und (C) gleichgesetzt,

$$a - 2y^2 = b - y^2$$

$$a - b = 2y^2 - y^2$$

$$a - b = y^2 \text{ (D)}$$

$$\pm \sqrt{(a - b)} = y$$

Wird der Werth von y^2 in (D) in die Gleichung (C) gesetzt, so erhält man

$$x^2 = b - (a - b)$$

$$x^2 = 2b - a$$

$$x = \pm \sqrt{(2b - a)}\ .$$

§. 101.

Aufgabe. Aus der bekannten Summe und dem Producte zweyer Zahlen diese Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Es sey die Summe $= s$, das Product $= p$. Nennt man ihre Differenz d, so ist (nach §. 83.) die größere Zahl $= \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$, die kleinere $= \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$.

Daher ist ihr Product

$$\left(\frac{s}{2} + \frac{d}{2}\right) \times \left(\frac{s}{2} - \frac{d}{2}\right) =$$

$$\frac{s^2}{4} - \frac{d^2}{4} = p$$

$$s^2 - d^2 = 4p$$

$$s^2 - 4p = d^2$$

$$d = \sqrt{(s^2 - 4p)}$$

Hierdurch ist d gegeben, folglich auch die größere nebst der kleineren Zahl.

Beyspiel. Es sey $s = 14$, $p = 45$, so wird $d = \sqrt{(14 \times 14 - 4 \times 45)} = \sqrt{(196 - 180)} = \sqrt{16} = 4$. Folglich ist $\frac{d}{2} = 2$ und die größere Zahl

$= 7 - 2 = 9$; die kleinere $= 7 - 2 = 5$. Wirklich ist auch $5 + 9 = 14$ und $5 \times 9 = 45$.

§. 102.

II. Aufgabe. Ein quadratisches Feldstück soll mit parallelen Baumreihen besetzt werden, die gleiche Entfernung haben. Setzt man in jede Reihe x Bäume nach Länge und Breite, so bleiben noch 284 übrig; setzt man dagegen nach Länge und Breite $x + 1$ Bäume, so hat man 25 zu wenig. Wie viel beträgt der Vorrath aller Bäume?

Auflösung. 1) Werden x Bäume nach Länge und Breite gepflanzt, so hält das Grundstück x^2 Bäume und der Vorrath ist, weil nun noch 284 übrig bleiben, $= x^2 + 284$.

Pflanzt man $x + 1$ nach Länge und Breite, so kommen auf das Feld $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ Bäume, und der Vorrath ist nun, da 25 Stücke fehlen, $= x^2 + 2x + 1 - 25 = x^2 + 2x - 24$.

3) Aus 1 und 2 entsteht also die Gleichung:

$$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24.$$

$$284 + 24 = x^2 - x^2 + 2x$$

$$308 = 2x$$

$$154 = x.$$

Probe. $154 \times 154 = 23716$. Addirt man die 284 dazu, so ist die Summe 24000 der Vorrath sämmtlicher Bäume. Eben so ist $155 \times 155 = 24025$, wovon die 25 abgezogen, ebenfalls 24000 übrig lassen.

§. 103.

III. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt, 24 giebt.

Auflösung. Heißt diese zu findende Zahl x, so ist

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 24$$

$$\frac{x^2}{6} = 24$$

$$x^2 = 6 \times 24$$

$$x = \pm \sqrt{144} = \pm 12.$$

Probe. $+ 6 \times + 4 = 24$ und
$- 6 \times - 4 = 24.$

§. 104.

Zusatz. Allgemein ausgesprochen lautet die vorige Aufgabe so: Was ist es für eine Zahl, deren $m$theil mit ihrem $n$theil multiplicirt, zum Producte p giebt? Hier ist die Gleichung

$$\frac{x}{m} \times \frac{x}{n} = p$$

$$\frac{x^2}{mn} = p$$

$$x^2 = mnp$$

$$x = \pm \sqrt{mnp}.$$

Beyspiel. Es sey $m = 3$, $n = 5$ und $p = 140$, so ist $x = \sqrt{3 \times 5 \times 140} = \sqrt{2100} = 45,825756\ldots$

§. 105.

IV. Aufgabe. Wenn a gegeben ist, so soll man x finden, damit $(x + a) \times (x - a) = b$ werde.

Auflösung. Aus der obigen Gleichung

$$(x + a) \times (x - a) = b \text{ folget}$$

$$x^2 - a^2 = b$$

$$x^2 = b + a^2$$

$$x = \pm \sqrt{(b + a^2)}$$

Beyspiel. Für $a = 6$ und $b = 64$ wird

$$x = \pm \sqrt{(64 + 36)} = \pm \sqrt{100} = \pm 10$$

Es ist aber auch $(10 + 6) \times (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$.

§. 106.

V. Aufgabe. Aus der Summe und Differenz der Quadrate zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Wenn die größere x, die kleinere y, die Summe s und die Differenz d heißt, so entstehen die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = s \text{ und } x^2 - y^2 = d$$

$$x^2 = s - y^2 \qquad x^2 = d + y^2$$

$$s - y^2 = d + y^2$$

$$s - d = 2y^2$$

$$\frac{s-d}{2} = y^2 \text{ und } y = \sqrt{\frac{s-d}{2}}$$

Wird dieser Werth von y^2 in obige Gleichung $x^2 = d + y^2$ gesetzt, so erhält man

$$x^2 = d + \frac{s-d}{2}$$

$$x^2 = \frac{2d + s - d}{2}$$

$$x^2 = \frac{s+d}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{s+d}{2}}$$

Beyspiel. Es sey $s = \frac{25}{36}$, $d = \frac{7}{36}$, so wird

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{25+7}{36}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{32}{36}\right)} = \sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{25-7}{36}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\frac{18}{36}\right)} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Wirklich ist nun $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$ und auch $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{36}$.

§. 107.

Lehrsatz. Jede bestimmte unreine quadratische Gleichung läßt sich auf die Form

$$x^2 \pm ax = b \text{ (A)}$$

bringen.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet am faßlichsten aus einigen Beyspielen.

I.) Die Gleichung sey

$$mx^2 + dx - n^2 = g + h, \text{ so ist}$$

$$mx^2 + dx = g + h + n^2$$

$$x^2 + \frac{d}{m}x = \frac{g + h + n^2}{m} \text{ (B)}$$

Setzt man hier $\frac{d}{m} = a$ und $\frac{g + h + n^2}{m} = b$, so bekömmt die Gleichung (B) die Form von (A).

II.) Es sey ferner

$$dx^2 - fx^2 + h = px + m, \text{ so wird}$$

$$dx^2 - fx^2 = px + m - h$$

$$(d - f)\,x^2 - px = m - h$$

$$x^2 - \frac{p}{d - f}x = \frac{m - h}{d - f} \text{ (C).}$$

Nimmt man hier $\frac{p}{d - f} = a$ und $\frac{m - h}{d - f} = b$, so hat die Gleichung (C) die Form

$$x^2 - ax = b$$

III.) Hätte man

$$-\frac{d}{x} + nx = 1 + h\,x; \text{ so wäre}$$

$$-d + nx^2 = x + hx^2$$

$$nx^2 - hx^2 - x = d$$

$$(n - h)\,x^2 - x = d$$

$$x^2 - \frac{1}{n-h}\,x = \frac{d}{n-h},$$ welche Gleichung wieder die allgemeine Form erhält, wenn man

$$\frac{1}{n-h} = a \text{ und } \frac{d}{n-h} = b \text{ setzt.}$$

Alle andere ähnliche Fälle lassen sich eben so behandeln.

§. 108.

Aufgabe. Die quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ aufzulösen.

Auflösung und Beweis. Wenn zu dem ersten Theile der Gleichung $x^2 + ax$ die Größe $\frac{a^2}{4}$ addirt wird, so erhält man $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$, und erkennet sogleich, daß diese Summe eine vollständige Quadratzahl ist, die $x + \frac{a}{2}$ zur Wurzel hat, denn $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$.

Setzt man daher diese $\frac{a^2}{4}$ auch zum andern Theile der Gleichung, so wird

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}.$$

2.) Zieht man nun auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so ist

$$\sqrt{\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)} \text{ oder}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}, \text{ folglich}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)} \text{ wodurch die Glei-}$$

chung aufgelößet ist.

§. 109.

Zusatz. Ueber die Auflößung der unreinen quadratischen Gleichungen lassen sich daher folgende Regeln geben:

I. Man bringe alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, in einen Theil der Gleichung zusammen;

II. Man befreye das Quadrat des Unbekannten von seinem Coefficienten, wenn es damit versehen ist.

III. Man füge jedem Theile der Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten der unbekannten Größe bey, wodurch der erste Theil jedesmal zu einem vollkommenen Quadrate wird. Wenn diese unbekannte Größe keinen Coefficienten in Buchstaben hat, so ist 1 dieser Coefficient.

IV. Man ziehe aus jedem Theile der Gleichung die Quadratwurzel, so wird dieselbe in eine einfache bestimmte verwandelt.

Anwendungen dieser Regeln werden folgende Aufgaben lehren.

§. 110.

I. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, welche fünfmal zu ihrem Quadrate gesetzt 104 zur Summe giebt.

Auflösung. Sie heiße x, so entsteht sogleich die Gleichung

$$x^2 + 5x = 104$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 104 + \frac{25}{4} \quad (\S.\ 109.\ \mathrm{III})$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\left(104 + \frac{25}{4}\right)} \quad (\S.\ 109.\ \mathrm{IV})$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(104 + \frac{25}{4}\right)}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{21}{2}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{5}{2} + \frac{21}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ -\frac{5}{2} - \frac{21}{2} = -\frac{26}{2} = -13. \end{cases}$$

Probe. Sowohl 8 als -13 wird der Foderung der Aufgabe entsprechen. Denn

$$8^2 + 5 \times 8 = 64 + 40 = 104$$
$$-13^2 + 5 \times -13 = 169 - 65 = 104$$

§. 111.

Anmerkung. Um vorstehende Aufgabe allgemein aufzulößen, frage man: was wird es für eine Zahl seyn, welche $n$mal ihrem Quadrate beygefügt, $= b$ ist?

Hier wird

$$x^2 + nx = b$$

$$x^2 + nx + \frac{n^2}{4} = b + \frac{n^2}{4}$$

$$x + \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\left(b + \frac{n^2}{4}\right)}$$

$$x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{n^2}{4}\right)}$$

Setzt man für n und b willkührliche Werthe, so wird x meist irrational werden.

§. 112.

II. Aufgabe. Die Zahl 30 in zwey Theile zu theilen, deren Product = 161 ist.

Auflösung. Nennt man den einen Theil x, so ist der andere $30 - x$ und die Gleichung wird folgende:

$$x \times (30 - x) = 161.$$

$$30x - x^2 = 161$$

$$x^2 - 30x = -161$$

$$x^2 - 30x + 15^2 = 15^2 - 161$$

$$x^2 - 30x + 225 = 225 - 161$$

$$x - 15 = \pm \sqrt{(225 - 161)}$$

$$x = 15 \pm \sqrt{64} = 15 \pm 8$$

$$x = \begin{pmatrix} 15 + 8 \\ 15 - 8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 23. \\ 7. \end{matrix}$$

Im ersten Falle ist $30 - x = 30 - 23 = 7$; im zweyten wird $30 - x = 30 - 7 = 23$. Folglich sind 23 und 7 die verlangten Zahlen; Ihre Summe ist $= 30$ und ihr Product 161.

§. 113.

III. **Aufgabe.** Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und der Summe ihrer Quadrate die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Es seyen x und y die zu findenden Zahlen, a bedeute ihre Summe, und b die Summe ihrer Quadrate. Aus der Aufgabe entspringen folgende zwey Gleichungen:

$$x + y = a \text{ (A) und } x^2 + y^2 = b \text{ (B)}$$

Die erste Gleichung giebt $y = a - x$, folglich

$$y^2 = a^2 - 2ax + x^2.$$

Setzt man diesen Werth von y^2 in die Gleichung (B), so ist

$$x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b$$

$$2x^2 - 2ax = b - a^2$$

$$x^2 - ax = \frac{b - a^2}{2}$$

Wird hier der erste Theil (nach §. 109, III) zu einem vollkommenen Quadrate ergänzt, so ist

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}$$

$$x - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}\right)} \text{(§. 109, IV)}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2}\right)} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{2b - 2a^2}{4}\right)}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2b - a^2}{4}\right)}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}.$$ Da nun oben $y = a - x$ war, so ist

$$y = a - \left(\frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}\right)$$

$$y = \frac{2a - a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

$$y = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

Beyspiel. I. Es sey $a = 7$ und $b = 25$, so wird

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(50 - 49)}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = 4 \text{ oder } 3;$$

und $$y = \frac{7 \mp \sqrt{(50 - 49)}}{2} = \frac{7 \mp 1}{2} = 3 \text{ oder } 4.$$

Folglich ist $x = 5$ und $y = 4$; oder $x = 4$ und $y = 3$.

Die Summe der Zahlen ist $= 4 + 3 = 7$; die Summe der Quadrate $= 16 + 9 = 25$.

II. Nähme man $a = 20$ und $b = 144$, so würde

$$x = 10 \pm \frac{\sqrt{(288 - 400)}}{2} = 10 \pm \frac{\sqrt{-112}}{2}$$

$$\text{und } y = 10 \mp \frac{\sqrt{(288 - 400)}}{2} = 10 \mp \frac{\sqrt{-112}}{2}$$

Da nun in beyden Formeln $\sqrt{-112}$ eine unmögliche Größe ist (§. 100, 1 und 2), so ist auch der Werth von x und y unmöglich. Es giebt daher keine zwey Zahlen, deren Summe $= 20$ und deren Quadrat-Summe 144 betragen kann.

§. 114.

Zusatz. Durch einen Kunstgriff, den man anwendet, kann vorhergehende Aufgabe leichter aufgelößet werden. Nennt man den halben Unterschied beyder Zahlen z, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{die größere} = \frac{a}{2} + z, \\ \text{die kleinere} = \frac{a}{2} - z \end{array}\right\} (\S.\ 83.)$$

Das Quadrat der größeren ist also $= \frac{a^2}{4} + az + z^2$; das Quadrat der kleineren aber $= \frac{a^2}{4} - az + z^2$. Daher wird die Summe beyder Quadrate

$$= \frac{a^2}{2} + 2z^2 = b$$

$$2z^2 = b - \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b - a^2}{4}$$

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{2b - a^2}{4}\right)} = \pm \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2};$$

Folglich wird die größere der beyden Zahlen

$$= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2};$$

die kleinere aber

$$= \frac{a}{2} \mp \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2},$$

welches die im vorigen §. gefundenen Werthe für die beyden Zahlen sind.

Beyspiel. Für $a = 10$ und $b = 58$ wird

$$z = \pm \frac{\sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{\pm 4}{2} = \pm 2;$$

folglich ist die größere Zahl, oder $\frac{a}{2} + z = 5 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ 7, \end{cases}$

und die kleinere wird $\frac{a}{2} - z = 5 - \pm 2 = 5 \mp 2 = \begin{cases} 3 \\ 7. \end{cases}$

Nun wird auch $7 + 3 = 10$ und $49 + 9 = 58$.

§. 115.

IV. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und Unterschied dem Quadrate gleich sind.

Auflösung. Nennt man beyde Zahlen x und y und setzt $x > y$, so entstehen die Gleichungen

$x + y = xy$ (A), $x^2 - y^2 = xy$ (B) und

$x + y = x^2 - y^2$ (C). Da nun

$(x + y) \times (x - y) = x^2 - y^2$ ist, (wie die Rechnung lehret) so wird aus (C)

$$x + y = (x + y) \times (x - y)$$

$$1 = x - y$$

$$1 + y = x \text{ (D)}$$

Setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (A) so ist

$$1 + 2y = y + y^2$$

$$1 + y = y^2$$

$$1 = y^2 - y$$

Wird nun hier $y^2 - y$ zu einem vollkommenen Quadrate ergänzt, so ist

$$1 + \frac{1}{4} = y^2 - y + \frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da nun (aus D) $x = 1 + y$, so wird

$$x = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Probe. 1) Da $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

so ist die Summe $x + y = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{5} = 2 \pm \sqrt{5}.$

2) Das Product xy findet man durch diese Rechnung

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

$$\frac{(3 \pm \sqrt{5}) \times (1 \pm \sqrt{5})}{4} =$$

$$\frac{3 \pm 3\sqrt{5} \pm \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} =$$

$2 \pm \sqrt{5}$ = der Summe in 1).

3) Da $x^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5}) \times (3 \pm \sqrt{5})}{4} =$

$$\frac{9 \pm 3\sqrt{5} \pm 3\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4},$$

und $y^2 = \frac{(1 \pm \sqrt{5}) \times (1 \pm \sqrt{5})}{4} =$

$$\frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4}$$ ist, so

wird $x^2 - y^2 = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4} - \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$ = der Summe in 1) und dem Product in 2).

§. 116.

V. Aufgabe. Ein Kaufmann hatte auf der Messe mehrere Stücke Tuch für 180 Ducaten gekauft, die er bey seinem Commissionär zurückließ. Ehe das Tuch ankam, starb der Kaufmann plötzlich, und nach einiger Zeit schickte der Commissionär den Erben 10 Stücke Tuch. Man weiß nicht, ob diese Zahl richtig sey, erinnert sich aber, daß der Verstorbene gesagt hat, wenn er seinen Handel einen Tag früher gemacht hätte, so würde er für eben diese 180 Ducaten 3 Stücke mehr haben kaufen können, und das Stück wäre um 3 Ducaten wohlfei-

Bayerische Staatsbibliothek München

ler gewesen. Wie viele Stücke Tuch waren es wirklich?

Auflösung. Die eigentliche Anzahl der Stücke Tuch sey x, so ist $\frac{180}{x}$ der Preis eines Stücks. Eben so ist einleuchtend, daß eben dieser Preis, nach den Bedingnissen der Aufgabe, auch durch $\frac{180}{x+3}+3$ ausgedrückt werden kann. Daher hat man.

$$\frac{180}{x}=\frac{180}{x+3}+3$$

$$\frac{180}{x}=\frac{180+3x+9}{x+3}$$

$$180=\frac{180x+3x^2+9x}{x+3}$$

$$180x+180\times 3=180x+3x^2+9x$$

$$180\times 3=3x^2+9x$$

$$180=x^2+3x$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=180+\frac{9}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(180+\frac{9}{4}\right)}=\pm\sqrt{\left\{\frac{720+9}{4}\right\}}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ -\frac{3}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{30}{2} = -15. \end{cases}$$

Folglich ist die Zahl der angekauften Stücke Tuchs = 12. Der zweyte Werth, da er negativ ist, kann hier nicht anwendbar seyn.

Probe. $\frac{180}{12} = 15$ Ducaten. Hätte der Kaufmann seinen Handel einen Tag früher geschlossen, so würde er $12 + 3 = 15$ Stücke haben kaufen können und nun hätte ein Stück $\frac{180}{15} = 12$ Ducaten gekostet, also 3 Dukaten weniger, als im vorigen Falle.

§ 117.

Anmerkung. Die unbestimmten quadratischen Gleichungen, welche in vielen Fällen sehr nützlich sind, sollen hier, weil sie den ersten Anfängern leicht zu schwer scheinen, nur in einigen Beyspielen erläutert werden.

§. 118.

I. Aufgabe. Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe sich zur Summe ihrer Quadrate verhält $= m : n$.

Auflösung. Es seyen x und y beyde Zahlen, so entsteht aus der Aufgabe nur Eine Gleichung.

$$x + y : x^2 + y^2 = m : n$$

$$nx + ny = mx^2 + my^2 \text{ (A)}$$

$$ny - my^2 = mx^2 - nx$$

$$\frac{ny - my^2}{m} = x^2 - \frac{n}{m} x$$

Bayerische Staatsbibliothek München

Wird nun für y ein bestimmter Zahlenwerth gesetzt, so ist nichts weiter zu thun, als eine bestimmte quadratische Gleichung aufzulösen, um den Werth von x zu finden.

Beyspiel. Es sey $m : n = 3 : 25$ und $y = 5$, so wird hier

$$\frac{ny - my^2}{m} = \frac{125 - 75}{3} = \frac{50}{3},$$

$$x^2 - \frac{25}{3}x = \frac{50}{3}$$

$$x^2 - \frac{25}{3}x + \frac{625}{36} = \frac{50}{3} + \frac{625}{36}$$

$$x - \frac{25}{6} = \pm\sqrt{\left(\frac{600 + 625}{36}\right)}$$

$$x - \frac{25}{6} = \pm\frac{\sqrt{1225}}{6} = \pm\frac{35}{6}$$

$$x = +\frac{25}{6} \pm \frac{35}{6}$$

$$x = \begin{cases} +\frac{25}{6} + \frac{35}{6} = \frac{60}{6} = 10 \\ +\frac{25}{6} - \frac{35}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Jeder dieser zwey Werthe entspricht der Foderung. Denn $10 + 5 : 100 + 25 = 3 : 25$ und $-\frac{5}{3} + 5 : \frac{25}{9} + 25 = \frac{10}{3} : \frac{250}{9} = 30 : 250 = 3 : 25$.

§. 119.

Zusatz. Wenn man den Werth von y blos willkührlich annimmt, so wird x meist eine irrationale Zahl werden. Wäre z. B. $m : n = 1 : 4$ und $y = 1$, so ist $x = 2 \pm \sqrt{7}$; folglich irrational. Setzt nun die Aufgabe zum Voraus, daß die zu findende Größen ganze oder gebrochene Rationalgrößen seyn sollen, so ist eine neue Methode nöthig, welche nun kürzlich erläutert werden soll.

§. 120.

II. Aufgabe. Die Frage des vorigen §. in rationalen Größen zu beantworten.

Auflösung. Man nehme ein neues Unbekanntes z unter der Voraussetzung, daß $y = zx$ sey, so wird $y > x$ wenn $z > 1$, und $y < x$, wenn $z < 1$ ist. Durch diese Annahme verwandelt sich die Gleichung (A) (§. 118) $nx + ny = mx^2 + my^2$ in folgende $nx + nxz = mx^2 + mx^2z^2$, worin x gemeinschaftlicher Factor von allen Gliedern ist. Daher wird

$$n + nz = mx + mxz^2$$

$\frac{n + nz}{m + mz^2} = x$. Da nun ferner $y = xz$,

so ist $y = \frac{nz + nz^2}{m + mz^2}$.

Wird nun der Werth von z rational genommen, so müßen es auch die Werthe von x und y werden, da x und y durch n, m und z bestimmt sind.

Beyspiele. I. Es sey $m = 1$, $n = 2$, $z = 1$, so wird, nach geführter Rechnung, $x = 2$ und $y = 2$, und es ist $2 + 2 : 4 + 4 = 1 : 2$.

II. Für $m = 1$, $n = 3$ und $z = 4$ wird $x = \frac{15}{17}$ und $y = \frac{60}{17}$, wo denn wieder $\frac{15}{17} + \frac{60}{17} : \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{60}{17}\right)^2 = 1 : 3$ u. s. w.

§. 121.

III. **Aufgabe.** Eine Quadratzahl zu finden, die von einer gegebenen Quadratzahl abgezogen, zum Reste wieder eine Quadratzahl giebt.

Auflösung. Die gegebene Quadratzahl sey a^2, die zu findenden Quadrate x^2 und y^2. Hier ist $a^2 - x^2 = y^2$ Nun sey

$$y = a - px, \text{ so wird}$$

$$a^2 - x^2 = a^2 - 2apx + p^2 x^2$$

$$- x^2 = - 2apx + p^2 x^2$$

$$x^2 = 2apx - p^2 x^2$$

$$x = 2ap - p^2 x$$

$$x + p^2 x = 2ap$$

$$x = \frac{2ap}{1 + p^2}, \text{ folglich}$$

$$y = a - \frac{2ap^2}{1 + p^2} = \frac{a + ap^2 - 2ap^2}{1 + p^2} = \frac{a - ap^2}{1 + p^2}.$$

Beyspiel. Nimmt man $a = 8$, $p = 2$, so wird

$$x = \frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{32}{5}, \text{ und}$$

$$y = \frac{8 - 8 \cdot 2 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{8 - 32}{5} = -\frac{24}{5}.$$

Auch ist nun $8 \cdot 8 - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \left(-\frac{24}{5}\right)^2$, wie die Rechnnng lehret.

§. 122.

IV. Aufgabe. Eine Quadratzahl zu finden, welche zu einer gegebenen Quadratzahl addirt, als Summe eine Quadratzahl hervorbringt.

Auflösung. Die gegebene Quadratzahl sey a^2, die zu findenden Quadrate x^2 und y^2, so ist $a^2 + x^2 = y^2$. Nun sey $y = p + x$, so wird

$$a^2 + x^2 = p^2 + 2px + x^2$$

$$a^2 - p^2 = 2px$$

$$\frac{a^2 - p^2}{2p} = x$$

Hierdurch findet sich nun

$$y = p + \frac{a^2 - p^2}{2p} = \frac{2p^2 + a^2 - p^2}{2p} = \frac{p^2 + a^2}{2p}.$$

Beyspiel. I. Für $a = 6$ und $p = 2$ wird $x = \frac{6 \cdot 6 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{36 - 4}{4} = \frac{32}{4} = 8$ und

$$y = \frac{2 . 2 + 6 . 6}{2 . 2} = \frac{4 + 36}{4} = \frac{40}{4} = 10.$$

Auch ist nun $36 + 66 = 100$.

II. Setzt man $a = 9$ und $p = 4$, so wird $x = \frac{81 - 16}{8} = \frac{65}{8}$, und $y = \frac{16 + 81}{8} = \frac{97}{8}$. Hier ist nun wieder

$81 + \left(\frac{65}{8}\right)^2 = \left(\frac{97}{8}\right)^2$, wie die wirkliche Rechnung lehret.

§. 123.

V. Aufgabe. Eine gegebene Quadratzahl in zwey andere Quadratzahlen zu theilen.

Auflösung. Wenn a^2 das gegebene Quadrat ist, und x^2, y^2 die zu findenden sind, so hat man $x^2 + y^2 = a^2$; folglich $y^2 = a^2 - x^2$ (A). Nimmt man nun $y = a - xz$ und erhebt jeden Theil zum Quadrate, so wird

$$y^2 = a^2 - 2axz + x^2z^2.$$

diesen Werth in die Gleichung (A) gesetzt, giebt

$$a^2 - 2axz + x^2z^2 = a^2 - x^2$$

$$x^2 + x^2z^2 = 2axz$$

$$x + xz^2 = 2az$$

$$(1 + z^2)x = 2az$$

$$x = \frac{2az}{1 + z^2}$$

Da nun $y = a - xz$, so ist $y = a - \frac{2az^2}{1 + z^2}$.

Beyspiele. I. Für $a = 3$, $z = 2$ wird

$$x = \frac{2\,.\,3\,.\,2}{1 + 2\,.\,2} = \frac{12}{5} \quad \text{und}$$

$$y = 3 - \frac{2\,.\,3\,.\,2\,.\,2}{1 + 2\,.\,2} = 3 - \frac{24}{5} = \frac{15 - 24}{5} = -\frac{9}{5},$$

wofür man als Quadratwurzel auch $+\frac{9}{5}$ setzen kann.

Hier ist auch $3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2$.

II. Für $a = 5$, $z = 3$, wird

$$x = \frac{2\,.\,5\,.\,3}{1 + 3\,.\,3} = \frac{30}{10} = 3 \quad \text{und}$$

$$y = 5 - \frac{2\,.\,5\,.\,3\,.\,3}{1 + 3\,.\,3} = 5 - \frac{90}{10} = \frac{50 - 90}{10} =$$

∓ 4. Auch ist hier $25 = 9 + 16$.

Fünfter Abschnitt.

Geometrische Aufgaben.

§. 124.

Erklärung. Aus dem oben erklärten Begriffe der Algebra folget, daß sie sich nicht allein mit der Auffindung und Bestimmung unstetiger Größen beschäftige, sondern auch auf stetige Größen, d. h. Linien, Flächen und Körper angewendet werden könne.

Jene Anwendung ist in dem bisherigen vierten Abschnitte der Algebra, nach dem Bedürfnisse der ersten Anfänger, gezeigt worden. Der Gegenstand dieses fünften Abschnittes sey eine algebraische Betrachtung Geometrischer Gegenstände, welche so lehrreich, als unterhaltend seyn wird.

Die hieher gehörigen Aufgaben sind theils bestimmte, theils unbestimmte, theils einfache, theils höhere und so wie die zu findenden algebraischen Werthe ursprünglich aus geometrischen Sätzen hervorgehen, so führen diese sämmtlichen Ausdrücke hinwiederum auf geometrische Constructionen zurück. Da alles dieses durch wirkliche Beyspiele und mündliche Erläuterungen des Lehrers deutlicher wird, als durch allgemeine Regeln, so wollen wir gleich zur Sache selbst schreiten.

§. 125.

I. Aufgabe. Eine grade Linie dergestalt zu theilen, daß das Quadrat des größeren Abschnittes dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte gleich sey.

Wenn AC (*Fig.* 1.) die gegebene grade Linie ist, so soll ein Punct F in ihr gefunden werden, daß

$$AC : CF = CF : FA, \text{ oder}$$

$$CF^2 = AC \times FA \text{ ist.}$$

Auflösung. Es sey

$AC = a$

$CF = x$, so ist

$FA = a - x$, folglich entstehet aus der Foderung der Aufgabe die Gleichung:

$$x^2 = a \times (a - x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)} - \frac{a}{2}.$$

Da $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, und $\sqrt{5}$ jedesmal eine irrationale Zahl ist, so wird man für den ganzen Werth von x eine Irrationalgröße finden, wenn die Linie a in Zahlen gegeben wäre. Diese arithmetische Irrationalität

verschwindet hingegen durch die geometrische Construction des Werthes von x.

Geometrische Construction.

Man setze (*Fig.* 2.) $AC = DC = a$ rechtwinklig zusammen, nehme $CE = \frac{a}{2}$ in der Verlängerung von AC und ziehe DE, so ist $DE^2 = DC^2 + CE^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$; folglich wird $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Macht man ferner $EF = ED$, so ist $CF = EF - CE = DE - CE = \sqrt{\left(\frac{5}{4}a^2\right)} - \frac{a}{2} = x$. Daher ist nun $CF^2 = AC \times FA$.

§. 126.

II. Aufgabe. Aus der gegebenen Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreyecks und seinem Inhalte das Dreyeck selbst zu bestimmen.

Auflösung. Es sey ABD (*Fcg.* 3.) das gegebene Dreyeck, sein Inhalt $= b^2$, die Hypotenuse $AB = a$ und die Höhe $DC = y$, so ist

$$\frac{a}{2} \times y = b^2$$

$$ay = 2b^2$$

$$y = \frac{2b^2}{a}$$

Beyspiel. Wäre $b = 64$, und $a = 16$, so wird

$$y = \frac{2 \times 64}{16} = 8.$$

Für $b^2 = 38$, $a = 10$, ist $y = \frac{2 \times 38}{10} = \frac{76}{10} = 7,6.$

Geometrische Construction. Der Ausdruck $y = \frac{2b^2}{a}$ giebt folgende Proportion

$$a : 2b = b : y.$$

Nun beschreibe man über $AB = a$ (*Fig.* 3.) einen Halbkreis, errichte aus A auf dieselbe das Loth $AE = 2b$, ziehe FB, mache $AG = \frac{1}{2} AE = b$, ziehe durch G die $GF \# BE$, durch F sodann die $FD \# AB$ und von A und B nach D die graden AD und BD, so ist ADB das verlangte Dreyeck. Denn da vermöge der Construction $\triangle AGF \backsim \triangle ABE$, so ist

$$AB : AE = AG : AF \; (= DH), \text{ d. h.}$$

$$a : 2b = b : \frac{2b^2}{a} \; (= y)$$

§. 127.

III. Aufgabe. Aus der gegebenen Summe der Catheten eines rechtwinkeligen Dreyecks und dem Lothe aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse die Seiten des Dreyecks selbst zu finden.

Auflösung. Es sey in dem

$\triangle ABC$ (*Fig.* 4.)

$AC + AB = a$

$AC - AB = y$

$BC = x$

$AD = b$, so ist

$$\left.\begin{aligned} AC &= \tfrac{1}{2}(a + y) \text{ und} \\ AB &= \tfrac{1}{2}(a - y) \end{aligned}\right\} (\text{§. } 83.)$$

Da nun $BC^2 = AC^2 + AB^2$, so ist

$$x^2 = \left(\frac{a + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - y}{2}\right)^2 \text{ oder}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + 2ay + y^2) + \tfrac{1}{4}(a^2 - 2ay + y^2)$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2y^2) = \tfrac{1}{2}(a^2 + y^2)$$

$$2x^2 = a^2 + y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2 \text{ (A)}$$ Nun ist

$$BA : DA = BC : AC, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(a - y) : b = x : \tfrac{1}{2}(a + y), \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2 \text{ folglich nach (A)}$$

$$a^2 - 4bx = 2x^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2x^2 + 4bx$$

$$a^2 = x^2 + 2bx$$

$$a^2 + b^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} = x + b$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} - b = x$$

Geometrische Construction. Man beschreibe über die gegebene Linie CH (*Fig.* 4.) $= a$ ein Rechteck, dessen Höhe $HF = b$, und ziehe CF, so ist $CF = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Nimmt man nun $FE = FH = b$, so ist $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Wird nun über $CB = CE$ ein

Halbkreis beschrieben, der GF in A schneidet, und zieht man die geraden Linien CA und AB, so ist CAB das verlangte Dreyeck

§. 128.

IV. Aufgabe. In der Cathete eines rechtwinkligen Dreyecks einen Punct zu finden, damit das Quadrat des daselbst errichteten, bis zur Hypotenuse verlängerten, Lothes dem Rechtecke aus beyden Segmenten dieser Cathete gleich sey.

Auflösung. Wenn CAB, (*Fig.* 5.) das gegebene Dreyeck ist, so soll der Punct D gefunden werden, daß $DE^2 = AD \times DB$.

Nun sey $AB = a$, $AC = b$, $BD = x$, folglich $DA = a - x$, und $DB \times DA = x \times (a - x) = ax - x^2$.

Da nun $DE \# AC$, so ist $\triangle EDB \backsim \triangle CAB$ und

$$BA : AC = BD : DE, \text{ oder}$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a} \; (= DE)$$

Daher ist $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, und man hat die Gleichung

$$\frac{b^2x^2}{a^2} = ax - x^2$$

$$b^2x^2 = a^3x - a^2x^2$$

$$b^2x = a^3 - a^2x$$

$$b^2x + a^2x = a^3$$

$$(a^2 + b^2)\,x = a^3$$

$$x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$$

Beyspiel. Setzt man $a = 8$, $b = 5$, so wird

$$x = \frac{512}{64 + 25} = \frac{512}{89} = 5{,}752 \ldots$$

Geometrische Construction. Aus $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$ folget $a^2 + b^2 : a^2 = a : x$. Zieht man nun aus A (*Fig.* 5.) ein Loth AE auf CB, und aus E ein Loth ED auf AB, so sind die hierdurch entstehenden rechtwinkligen Dreyecke sowohl unter sich, als dem $\triangle CAB$ ähnlich. Daher ist

$AB : BE = BE : BD$, folglich

$BE^2 = AB \times BD$; aber

$AB^2 = AB \times AB$, folglich auch

$AB^2 : BE^2 = AB : BD$. Nun ist ferner

$AB^2 : BE^2 = BC^2 : AB^2$, daher

$BC^2 : AB^2 = AB : BD$, oder algebraisch

$a^2 + b^2 : a^2 = a : x$. Folglich

wird auf BA der zu findende Punct D durch die beyden Lothe AE und ED bestimmt.

§. 129.

V. Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck ein Quadrat zu verzeichnen, welches auf der einen Seite desselben stehet, und mit seinen andern zwei Winkelpuncten die beyden übrigen Seiten des Dreyecks berühret.

Auflösung. Es sey ABC (*Fig.* 6.) das gegebene Dreyeck und $DEKF$ das zu construirende Quadrat. Wird hier aus A das Loth AH auf BC gezogen, so wird DF in

M geschnitten. Nun sey $BC = a$, $AH = h$, $AM = x$, folglich $MH = FK = DE = h - x$. Da nun DF ⧣ BC, so ist

$$BC : BA = DF : DA$$

$$BC : DF = BA : DA \text{ aber}$$

$$BA : DA = HA : MA$$

$$BC : DF = HA : MA \text{ oder}$$

$$a : DF = h : x \text{ und } DF = \frac{ax}{h}.$$

Da nun ferner $DF = FK = MH = h - x$, so hat man

$$\frac{ax}{h} = h - x$$

$$ax = h^2 - hx$$

$$ax + hx = h^2$$

$$(a + h)\, x = h^2$$

$$x = \frac{h^2}{a + h}.$$

Beyspiele. I. Für $a = 3$, $h = 6$, wird $x = \frac{36}{3 + 6} = \frac{36}{9} = 4$.

II. Für $a = 8$, $h = 6$ wird $x = \frac{36}{8 + 6} = \frac{36}{14} = 2{,}5714 \ldots$.

Geometrische Construction. Zur geometrischen Construction dieses Werthes darf man nur, da aus $x = \frac{h^2}{a + h}$

die Proportion $a + h : h = h : x$ folget, zu den drey bekannten Linien die vierte Proportionallinie finden, welche $= AM$ ist. Indessen läßt sich auch folgendergestalt verfahren. Man beschreibe mit einem Halbmesser $AO = AH + BC$ aus A einen Bogen, der die über B verlängerte Grundlinie CB in O schneidet. Wird nun aus H das Loth HR auf AO gefällt, und sodann AR aus A auf AH getragen, so ist hierdurch der Punct M bestimmt, der die Lage der Parallele DF und der Lothe DE und FK zur Bildung des Quadrats $DFKE$ angiebt. Denn wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ARH und AOH ist

$$AH : AR = AO : AH$$

$$AH^2 = AR \times AO \text{ da nun}$$
$$AO^2 = AO \times AO, \text{ so ist}$$

$$AO^2 : AH^2 = AO : AR$$

$$AR = \frac{AH^2 \times AO}{AO^2} = \frac{AH^2}{AO}.$$

Drückt man diesen letzten Werth algebraisch aus, so wird $AR = AM = \frac{h^2}{a + h}$, wie in der vorigen Auflösung.

§. 130.

VI. **Aufgabe.** Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Seite des regelmäßigen Dreyecks zu finden, welches in demselben beschrieben werden kann.

Auflösung. Wenn EB (*Fig.* 7.) der Halbmesser ist, so beschreibe man den Kreis, trage den Radius aus B in D und ziehe DE. Wird nun das Loth BF auf DE gezogen und bis A verlängert; so ist BA die Seite des in den Kreis zu

construirenden gleichseitigen Dreyecks. Um sie zu finden, sey nun $EB = BD = DE = a$, $BA = x$, so ist

$$DF = \frac{a}{2} \text{ und } BF = \frac{x}{2}.$$

Da nun $BF^2 = DB^2 - DF^2$, so ist

$$\frac{x^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$x^2 = 3a^2$$

$x = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$, d. h. die Seite des in dem Kreis zu beschreibenden gleichseitigen Dreyecks ist dem Producte aus dem Halbmesser in die Quadratwurzel von 3 gleich.

Da nun $\sqrt{3}$ eine arithmetische Irrationalgröße ist, so wird es auch der arithmetische Werth von $a\sqrt{3}$ seyn.

Geometrische Construction. Um obigen Werth $x^2 = 3a^2$ zu construiren, setze man $3a : x = x : a$, und suche nun zu $3a$ und a die mittlere geometrische Proportionallinie.

Dieses geschieht, wenn man (*Fig.* 8.) $AB = 3a$, $BC = a$ setzet, über AC einen Halbkreis beschreibet, und aus B das Loth BL errichtet, welches, da $BL^2 = AB \times BC$, die verlangte Dreyecksseite seyn muß.

§. 131.

Zusatz. I. Aus $x^2 = 3a^2$ folget $a^2 : x^2 = 1 : 3$, d. h. das Quadrat der Seite des regulairen Dreyecks ist dreymal so groß, als das Quadrat der Seite des regulairen Sechsecks in dem nämlichen Kreise.

II. Wenn die Seite des regulairen Dreyecks $= b$ gegeben ist, und man soll den Halbmesser des um dasselbe zu beschreibenden Kreises $= y$ finden, so wird

$3y^2 = b^2$; folglich

$y^2 = \frac{b^2}{3}$ und

$b : y = y : \frac{b}{3}$ d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Seite des gegebenen Dreyecks und dem Drittel dieser Seite.

III. Da die halbe Seite AB (*Fig.* 7.) oder BF der Sinus des Bogens BD von 60° ist, so kann man auch durch den obigen Ausdruck $\sqrt{3a^2} = x$ den Sinus des Winkels von 60° berechnen. Es ist nämlich $Sin.\ 60° = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2}$.

Setzt man $a = 1$, so wird $Sin.\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254$, wie ihn auch die Tafeln enthalten.

§. 132.

VII. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser des Kreises die Seite des in denselben zu beschreibenden regulairen Zehnecks zu finden.

Auflösung. Es sey (*Fig.* 9.) der gegebene Halbmesser $CA = a$, und $AB = x$ die Seite des Zehnecks, so ist der Bogen $AB = \frac{1}{10}$ der Peripherie, folglich $\angle ACB = 36°$; daher $\angle CAB = \angle CBA = 72°$. Macht man $AD = AC$ und zieht DC, so ist $\angle CDA = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle CAB = 36°$.

Folglich ist $\angle DCB = 72°$ und $\triangle BCD \backsim \triangle BCA$. Daher

$BD : BC = BC : BA$, oder

$$a + x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = ax + x^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\tfrac{5}{4} a^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} = x + \frac{a}{2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - \frac{a}{2} = x \text{ (A)}$$

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{5} - \frac{a}{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$$

$$x = a \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

$$x = a \times 0{,}6180340 \ldots \text{ (B)}$$

Man sieht hieraus, daß der Werth für die Seite des regulairen Zehnecks, arithmetisch betrachtet, eine Irrationalgröße sey.

Geometrische Construction. Man errichte auf des gegebenen Durchmessers *AB* (*Fig.* 10.) Mitte *C* den lothrechten Halbmesser *CD*, und theile *CB* in *E* in zwey gleiche Stücke, so ist $CE = \frac{a}{2}$; folglich

$$DE^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$DE = \sqrt{(\tfrac{5}{4}\, a^2)}.$$

Macht man nun $EF = ED$, so ist $CF = \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} - \frac{a}{2}$, folglich CF die zu findende Seite des Zehnecks. (A)

§. 133.

Zusatz. Da die halbe Seite des regulairen Zehnecks der Sinus des Winkels von 18° ist, so wird für den Halbmesser $a = 1$ (nach §. 132, *B*)

$$Sin.\ 18^\circ = \frac{x}{2} = \frac{1 \times 0{,}6180340}{2} = 0{,}3090170,$$

wie ihn auch die Tafeln geben.

§. 134.

VIII. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Seite des regulairen Fünfecks zu finden, welches in denselben beschrieben werden kann.

Auflösung. Es sey (*Fig.* 11.) $CD = a$, und die Seite des Fünfecks $AB = x$, so ist die Seite des Zehnecks, oder

$$DB = \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} - \frac{a}{2}\ (\text{§. 132, A.}).$$

Da nun $CE^2 = CB^2 - BE^2$, so ist

$$CE^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}, \text{ und}$$

$$CE = \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}; \text{ folglich}$$

$$DE = a - \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$ und

$$DE^2 = a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)} + a^2 - \frac{x^2}{4},$$

oder $DE^2 = 2a^2 - \frac{x^2}{4} - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$

Weil nun $BE^2 = \frac{x^2}{4}$, so ist

$$DB^2 = DE^2 + BE^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \text{ (A)}$$

Da nun (nach §. 132, A)

$DB = \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} - \frac{a}{2}$, so wird

$DB^2 = \tfrac{5}{4}\, a^2 - 2\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} \times \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}$, oder

$DB^2 = \tfrac{6}{4}\, a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2}.$

Wird nun von dem oben (in A.) gefundenen Werthe von DB^2 der letztere abgezogen, so ist die Rechnung diese:

$$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$DB^2 = \tfrac{6}{4}\, a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2}$$

$$o = \tfrac{1}{2}\, a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4} a^2} - 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\tfrac{1}{2}\, a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} = 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}\, a^2} = 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{2a}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4}a^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} + 2a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{5}{4}a^2 = 4a^2 - x^2$$

$$\tfrac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$x^2 = 4a^2 - \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x^2 = \tfrac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x^2 = a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}.$$

Da nun nach den oben gefundenen Ausdrücken

$a^2 = DC^2$, und

$DB^2 = \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$, auch

$AB^2 = x^2$, so hat man

$AB^2 = DC^2 + DB^2$, oder:

das Quadrat der Seite des regulairen Fünfecks ist so groß, als das Quadrat der Seite des regulairen Sechsecks und jenes des regulairen Zehnecks zusammengenommen.

Geometrische Construction. Wenn also der Halbmesser des Kreises und die Seite des regulairen Zehnecks gegeben sind, so läßt sich die Seite des Fünfecks geometrisch bestimmen, wenn man jene Linien als Catheten betrachtet, und die dazugehörige Hypotenuse zieht.

§. 135.

IX. Aufgabe. In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, daß dessen Umfang sowohl den Bogen, als die beyden Halbmesser berühret.

Auflösung. Es sey ACB (*Fig.* 12.) der gegebene Quadrant, dessen Halbmesser $BA = BE = BC = a$, und EFG der zu findende Kreis. Zieht man aus D nach den Berührungspuncten E, F und G die graden Linien DE, DF und DG, so ist $\angle DFB = \angle DGB = R = GBF = GDF$; folglich $DFGB$, weil $DF = DG$, ein Quadrat, und $\angle GBD = \frac{1}{2} R$.

Wird nun BD verlängert, so muß sie durch den Berührungspunct E gehen (*El. III*, 11.)

Setzt man nun $DE = DF = DG = x$, so ist $DB = \sqrt{(DF^2 + BF^2)} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, folglich $BE = BD + DE = x\sqrt{2} + x$. Da nun $BE = a$, so ist

$$x\sqrt{2} + x = a$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = a$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1}$$

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1)}$$

$$x = \frac{a \times (\sqrt{2} - 1)}{1} = a \times (\sqrt{2} - 1),$$

$$x = a\sqrt{2} - a = \sqrt{2a^2} - a.$$

Geometrische Construction. Man halbire den rechten Winkel CBA durch BE, welche den Bogen in E schneidet, und ziehe von E die Tangente EH, welche die verlängerte BA in H schneidet. Macht man nun $BG = AH$, errichtet aus G das Loth GD, so ist der Punct D des zu findenden Kreises Mittelpunct und DG dessen Halbmesser. Denn da $\angle ABE = \frac{1}{2} R$ und $\angle BEH = R$, so ist

auch $\angle H = \frac{1}{2} R$, und $BE = EH = a$; folglich $BH = \sqrt{(BE^2 + EH^2)} = \sqrt{2a^2}$, und $BG = AH = BH - BA = \sqrt{2a^2} - a$.

§. 136.

X. Aufgabe. In der Cathete eines rechtwinkeligen Dreyecks einen Punct zu finden, der die Lage hat, daß ein daselbst errichtetes und bis zur Hypotenuse verlängertes Loth das ganze Dreyeck in zwey gleiche Theile theile.

Auflösung. Es sey ABC (*Fig.* 13.) das gegebene Dreyeck, und DE das zu findende Loth; so nenne man $BC = a$, $AB = b$ und $CD = x$. Da nun $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$, so ist $BC : AB = DC : ED$, oder

$$a : b = x : \frac{bx}{a} \; (= ED),$$

Folglich wird der Inhalt des $\triangle EDC = ED \times \frac{1}{2} DC = x \times \frac{bx}{2a} = \frac{bx^2}{2a}$. Aber der Inhalt des $\triangle ABC = AB \times \frac{1}{2} BC = \frac{ab}{2}$ und man hat, da $\triangle EDC = \frac{1}{2} \triangle ABC$ seyn soll, die Gleichung

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\frac{bx^2}{2a} = \frac{ab}{4}$$

$$4bx^2 = 2a^2b$$

$$2bx^2 = a^2b$$

$$x^2 = \frac{a^2b}{2b} = \frac{a^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}.$$

Geometrische Construction. Man halbire BC in F, beschreibe aus F mit BF den Halbkreis BGC, errichte das Loth FG, ziehe BG und CG und mache $CD = CG$, so ist D der gesuchte Punct. Denn da $BG = CG$, so ist $CB^2 = 2CG^2$, oder $a^2 = 2CG^2$, daher denn $\frac{a^2}{2} = CG^2$, und $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = CG$ wird.

§. 137.

Zusatz. I. Da nach der Foderung der vorigen Aufgabe auch das Paralleltrapez $ABDE = \frac{1}{2} \triangle ABC$ seyn muß, so entstehet hieraus folgende Gleichung, deren Bildung und Auflösung eine lehrreiche Uebung für Anfänger ist. Nämlich:

$$\left(b + \frac{bx}{a}\right) \times \frac{a - x}{2} = \frac{ab}{4}$$

$$\frac{ab + bx}{a} \times \frac{a - x}{2} = \frac{ab}{4}$$

$$\frac{(a + x)\, b \times a - x}{2a} = \frac{ab}{4}$$

$$(a^2 - x^2)\, b = \frac{2a^2b}{4} = \frac{a^2b}{2}$$

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 - \frac{a^2}{2} = x^2$$

$$\frac{a^2}{2} = x^2, \text{ wie oben.}$$

§. 138.

Zusatz. II. Um zu zeigen, daß die Aufgabe in §. 136. nicht allein von rechtwinkligen Dreyecken gilt, sondern auch auf spitz- und stumpfwinkelige ausgedehnt werden kann, bemerke man Folgendes: Soll man z. B. in der Grundlinie BC, (*Fig.* 14.) des $\triangle ABC$ einen Punct D finden, der die Lage hat, daß eine durch ihn mit BA gezogene Parallele DE das ganze Dreyeck halbiret, so ziehe man die Lothe AG und EF und setze $AB = a$, $BC = b$, $AG = d$ und $DC = x$, so findet man EF durch folgende Proportion:

$$b : x = d : \frac{dx}{b} \; (= EF).$$

Nun ist $\triangle ABC = \frac{db}{2}$, folglich $\frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{db}{4}$, und $\triangle DEC$ wird $= \frac{dx}{b} \times \frac{x}{2} = \frac{dx^2}{2b}$. Daher hat man die Gleichung

$$\frac{dx^2}{2b} = \frac{db}{4}$$

$$4dx^2 = 2db^2$$

$$4x^2 = 2b^2$$

$$x^2 = \frac{b^2}{2}$$

$x = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$. Hieraus erhellet, daß dieser Fall

der allgemeine, der in §. 136. enthaltene, aber nur ein besonderer davon sey.

§. 139.

Zusatz III. Eben diese Aufgabe läßt sich auch noch kürzer auf folgende Weise auflösen.

Da $\triangle\ EDC = \frac{1}{2}\ \triangle\ ABC$ seyn soll, und zugleich $\triangle\ EDC \backsim \triangle\ ABC$, so hat man

$\triangle\ ABC : \triangle\ EDC = BC^2 : DC^2$, d. h.

$$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{4} = a^2 : x^2$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = a^2 : x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}, \text{ wie oben (§. 136.)}.$$

§. 140.

Zusatz. IV. Ganz allgemein könnte man nun fragen, wie der Punct D auf CB genommen werden müße, damit $\triangle\ EDC = \frac{1}{n}\ \triangle\ ABC$ werde?

Hier verhält sich wieder

$\triangle\ ABC : \triangle\ EDC = BC^2 : DC^2$, oder

$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{2n} = a^2 : x^2$, folglich

$$x^2 = \frac{a^2}{2n} \times 2 = \frac{2a^2}{2n} = \frac{a^2}{n}, \text{ daher}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{n}}.$$

Beyspiel. Sollte $\triangle EDC$ z. B. der 7te Theil vom $\triangle ABC$ werden, so wäre $x = \sqrt{\frac{a^2}{7}} = \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{a}{2{,}6457513}$ . . . u. s. w.

§. 141.

Zusatz. V. Sollte das zu findende $\triangle EDC = \frac{n}{m} \triangle ABC$ werden, wobey man $n < m$ annimmt, so würde aus der Proportion:

$$\triangle ABC : \triangle EDC = BC^2 : DC^2,$$

nun $\frac{ab}{2} : \frac{nab}{2m} = a^2 : x^2$, oder

$$\tfrac{1}{2} : \frac{n}{2m} = a^2 : x^2; \text{ folglich}$$

$$x^2 = \frac{a^2 n}{2m} \times 2 = \frac{2a^2 n}{2m} = \frac{a^2 n}{m}, \text{ daher}$$

$x = \sqrt{\frac{na^2}{m}} = a\sqrt{\frac{n}{m}}$. — Wie übrigens die in §. 136 und hier gefundenen Werthe geometrisch construirt werden können, ist nicht schwer zu übersehen, und wird dem mündlichen Vortrage zur Erläuterung überlassen.

§. 142.

XI. Aufgabe. Jedes Dreyeck durch ein auf einer Seite desselben errichtetes Loth, welches mit keiner Dreyecksseite gleichlaufend ist, zu halbiren.

Auflösung. Das $\triangle BAC$ (*Fig.* 15.) soll durch das auf BC errichtete Loth E_F so getheilt werden, daß $\triangle FEC = \frac{1}{2} \triangle ABC$. Wäre hier $BA = AC$, oder das gegebene Dreyeck gleichschenkelig, so läge der zu findende Punct E in der Mitte der Grundlinie BC. Fällt der Punct D des von A auf BC gezogenen Lothes AD so, daß $BD < DC$ ist, so muß $\triangle ADB < \triangle ADC$ seyn, und der Punct E des zu ziehenden Lothes EF muß zwischen D und C liegen.

Diesen letzten Fall angenommen sey hier $BC = a$, des Dreyecks ABC Höhe $AD = b$, $CD = c$, und $CE = x$.

Da nun $\triangle ADC \backsim \triangle FEC$, so hat man

$$CD : DA = CE : EF, \text{ d. h.}$$

$$c : b = x : \frac{bx}{c} (= EF)$$

und $\frac{bx}{c} \times \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2c}$ ist der Inhalt des Dreyecks FEC, so wie $\frac{ab}{2}$ jener des $\triangle ABC$ ist. Daher entsteht nach der Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{bx^2}{2c} = \frac{ab}{4}$$

$$4bx^2 = 2a\,bc$$

$$x^2 = \frac{2a\,bc}{4b} = \frac{ac}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{ac}{2}}.$$

Geometrische Construction. Um den Werth $x^2 = \frac{ac}{2}$ zu construiren, setze man $\frac{a}{2} : x = x : c$, woraus fol-

gende Construction fliesset. Man setze $\frac{a}{2}$ und c in eine grade Linie zusammen, beschreibe über dieselbe einen Halbkreis, errichte aus dem Vereinigungspuncte dieser Linien ein Loth bis zur Peripherie, so ist dieses der zu suchende Werth von x.

§. 143.

XII. Aufgabe. Aus einem in der Grundlinie eines Dreyecks gegebenen Puncte eine grade Linie durch dasselbe zu ziehen, wodurch diese Figur halbirt wird.

Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ABC (*Fig.* 16.) und D der in BC gewählte Punct. Läge dieser in der Mitte von BC, so müßte die grade Linie von D nach A gezogen werden, um die Aufgabe zu lösen. Befindet sich aber D (wie hier) näher bey B, als bey C, so muß die Theilungslinie die Seite AC schneiden. Dies geschehe in E, so setze man $CE = x$. Ferner ziehe man die Lothe AF und EG, und setze $BC = a$, $CD = b$, $AF = c$, $AC = d$. Da hier $\triangle AFC \backsim \triangle EGC$, so ist

$$CA : AF = CE : EG, \text{ d. h.}$$

$$d : c = x : \frac{cx}{d}.$$

Der Inhalt des $\triangle$ DEC ist also $= \frac{cx}{d} \times \frac{b}{2} = \frac{bcx}{2d}$;

desgleichen wird die Fläche des $\triangle ABC = \frac{ac}{2}$, und man hat, nach der Foderung der Aufgabe

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{ac}{4}$$

$$4bcx = 2acd$$

$$2bx = ad$$

$$x = \frac{ad}{2b}$$

Geometrische Construction. Da aus $x = \frac{ad}{2b}$ die Proportion

$2b : a = d : x$ folget, so darf man, um x zu finden, nur zu $2b$, a und d die vierte Proportionallinie suchen.

§. 144.

Zusatz. Wenn durch die Linie DE irgend ein bestimmter Theil, z. B. $\frac{n}{m}$ des $\triangle$ BAC abgeschnitten werden sollte, so wäre

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{n}{m} \times \frac{ac}{2}$$

$$\frac{bcx}{2d} = \frac{acn}{2m}$$

$$2bcmx = 2acdn$$

$$bmx = adn$$

$$x = \frac{adn}{bm}$$

Um diesen Werth zu construiren, suche man zu $m$mal b, $n$mal a und d die vierte geometrische Proportionallinie, denn es verhält sich $mb : na = d : x$

§. 145.

XIII. Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyecks die Größe seines Flächenraumes zu finden.

Auflösung. Wenn man in dem $\triangle$ ABC, (*Fig.* 17.) AB $= m$, AC $= q$, das Loth AD $= d$, BD $= n$, DC $= p$ und BC $= n + p = s$ setzt, so ist

$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(m + q + s).\ (m + q - s).\ (m + s - q).\ (q + s - m)}$.

Analytischer Beweis. Wird die blos angezeigte Multiplication wirklich ausgeführt, so erhält man nach geschehener Reduction, Folgendes

$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(2m^2q^2 + 2m^2s^2 + 2q^2s^2 - q^4 - m^4 - s^4)}\ (\alpha)$

worin die Wurzelgröße aus sechs abgesonderten Größen, drey positiven und drey negativen, bestehet.

Da nun $m^2 = d^2 + n^2$, $q^2 = d^2 + p^2$ und $s = n + p$, so geben jene sechs Größen Nachstehendes:

I. Glied, oder $2m^2q^2 = 2(d^2 + n^2) \times (d^2 + p^2)$
$= (2d^2 + 2n^2) \times (d^2 + p^2)$
$= 2d^4 + 2d^2p^2 + 2n^2d^2 + 2n^2p^2$.

II. Glied, oder $2m^2 s^2 = 2(d^2 + n^2) \times (n + p)^2$
$= (2d^2 + 2n^2) \times (n^2 + 2np + p^2)$
$= 2d^2n^2 + 4d^2np + 2d^2p^2 + 2n^4 + 4n^3p + 2n^2p^2$.

III. Glied, oder $2q^2s^2 = 2(d^2 + p^2) \times (n + p)^2$
$= (2d^2 + 2p^2) \times (n^2 + 2np + p^2)$
$= 2d^2 n^2 + 4d^2np + 2d^2p^2 + 2p^2n^2 + 4np^3 + 2p^4$.

IV. Glied, oder $-q^4 = -(d^2 + p^2)^2 = -d^4 - 2d^2p^2 - p^4$.

V. Glied, oder $-m^4 = -(d^2 + n^2)^2 = -d^4 - 2d^2n^2 - n^4$.

VI. Glied, oder $-s^4 = -(n + p)^4 = -n^4 - 4n^3p - 6n^2p^2 - 4np^3 - p^4$.

Setzt man nun die drey ersten Glieder, da sie positiv sind, zusammen, so entstehet folgende

$$\text{Summe} \left\{ \begin{array}{l} 2d^4 + 2d^2p^2 + 2d^2n^2 + 2n^2d^2 + 2p^2n^2 \\ + 4npd^2 + 2p^2d^2 + 2n^4 + 4n^3p + 2p^2n^2 \\ + 2n^2d^2 + 4npd^2 + 2p^2d^2 + 2n^2p^2 + 4np^3 + 2p^4. \end{array} \right.$$

oder reducirt. $\left.\begin{array}{l} 2d^4 + 6d^2p^2 + 6d^2n^2 + 6p^2n^2 + 8npd^2 \\ + 2n^4 + 4n^3p + 4np^3 + 2p^4, \end{array}\right\} (A)$

Aus der Addition der drey letzten negativen Glieder entspringt nun folgende negative

Summe $\left\{\begin{array}{l} -d^4 - 2d^2p^2 - p^4 - d^4 - 2d^2n^2 - n^4 \\ -n^4 - 4n^3p - 6n^2p^2 - 4np^3 - p^4, \end{array}\right\} (B)$

Vergleichet man nun diese beyde Summen (A) und (B) mit einander, so heben sich die meisten Glieder gegenseitig auf, und es bleibt noch

$4d^2p^2 + 4d^2n^2 + 8npd^2$ übrig.

Daher wird nun die obige Gleichung (α) in nachstehende verwandelt

$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(4d^2p^2 + 4d^2n^2 + 8npd^2)}$ oder,
da $\sqrt{(4d^2p^2 + 8npd^2 + 4d^2n^2)} = 2dp + 2dn$ ist,
$\triangle ABC = \frac{1}{4}(2dp + 2dn) = \frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dn.$

Da nun $\frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}dn$ wirklich den Inhalt des $\triangle$ ABC angiebt, so ist hierdurch die Richtigkeit der in der Auflösung stehenden Formel erwiesen.

§. 146.

Zusatz. Die in dem vorigen §. erwiesene Formel kann auf folgende Weise bequemer eingerichtet werden:

Es sey die halbe Summe der drey Seiten a, b und c des Dreyecks, oder

$\frac{a+b+c}{2} = S$, so wird

1.) $a + b + c = 2S$

2.) $a + b - c = 2S - 2c$

3.) $a + c - b = 2S - 2b$, und

4.) $b + c - a = 2S - 2a$.

Werden diese Werthe in obige Formel gesetzt, so ist, wenn die Dreyecksebene F heißt,

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[2S \,.\, (2S - 2c) \,.\, (2S - 2b) \,.\, (2S - 2a)]}.$$

Da nun z. B. $\tfrac{1}{4}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{4} = \sqrt{\frac{n}{16}}$ ist, so wird

$$F = \sqrt{\left(\frac{2S \,.\, (2S - 2c) \,.\, (2S - 2b) \,.\, (2S - 2a)}{16}\right)}, \text{ oder}$$

$$F = \sqrt{\left(\frac{2S}{2} \,.\, \frac{2S - 2c}{2} \,.\, \frac{2S - 2b}{2} \,.\, \frac{2S - 2a}{2}\right)}, \text{ folglich}$$

$$F = \sqrt{[S \,.\, (S - c) \,.\, (S - b) \,.\, (S - a)]}.$$

Hieraus entspringt die Regel:

Man ziehe von der halben Summe der drey Seiten jede Seite einzeln ab, multiplicire diese drey Reste mit der halben Summe, und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel, so giebt diese des Dreyecks Inhalt.

§. 147.

Anmerkung. Von der Wichtigkeit dieser Formel und ihrer Anwendung auf einzelne Beyspiele in den Vorlesungen.

§. 148.

XIV. Aufgabe. Wenn die vier Seiten eines in den Kreis beschriebenen Vierecks nebst der einen Diagonale desselben gegeben sind, die andere Diagonallinie zu finden.

In dem Vierecke EBCA, (*Fig.* 18.) sind die Seiten EA $= a$, EB $= b$, BC $= c$, CA $= d$, und die Diagonale EC $= f$ gegeben, man soll AB finden.

Auflösung. Man setze AB $= x$, und ziehe EF, daß $<$ BEF $= <$ AEC. Da nun noch $<$ ECA $= <$ EBA, so ist $\triangle$ ECA $\backsim$ $\triangle$ EFB, und man hat

$$EC : AC = EB : BF, \text{ d. h.}$$
$$f : d = b : BF,$$

folglich ist $BF = \frac{bd}{f}$.

Weil nun ferner $<$ EAB $= <$ ECB, und $<$ AEF $= <$ CEB, so ist $\triangle$ AEF $\backsim$ $\triangle$ ECB, und man hat

$$EC : CB = EA : AF, \text{ d. h.}$$
$$f : c = a : AF,$$

folglich $AF = \frac{ac}{f}$. Da nun BF + AF = AB, so entstehet die Gleichung

$$\frac{bd}{f} + \frac{ac}{f} = x = \frac{bd + ac}{f}$$

$$bd + ac = fx$$

Aus dieser letzten Gleichung entspringt folgender Lehrsatz: Bey jedem in einen Kreis beschriebenen Vierecke sind die beyden Rechtecke aus dessen gegenüber liegenden Seiten zusammengenommen dem Rechtecke aus beyden Diagonallinien gleich.

§. 149.

XV. Aufgabe. Einen Kreis zu finden, dessen Fläche der krummen Seitenfläche eines gegebenen senkrechten Cylinders gleich ist.

Auflösung. Des Cylinders Durchmesser heiße d, dessen Höhe h, der Durchmesser des zu findenden Kreises sey x. Wenn man die Ludolphische Zahl π nennet, so ist die krumme Seitenfläche des Cylinders $= d\pi h$, die Ebene des zu findenden Kreises aber $= x\pi \times \frac{x}{4} = \frac{x^2\pi}{4}$.

Folglich hat man die Gleichung

$$d\pi h = \frac{x^2\pi}{4}$$

$$dh = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 = 4dh$$

$$x = \sqrt{4dh} = 2\sqrt{dh}$$

$$\tfrac{1}{2}x = \sqrt{dh}.$$

d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist der Quadratwurzel aus dem Producte der Höhe des Cylinders in dessen Durchmesser gleich.

Um diesen Halbmesser geometrisch zu construiren, darf man nur zwischen der Höhe und dem Durchmesser des Cylinders die mittlere geometrische Proportionallinie suchen.

§. 150.

XVI. Aufgabe. Aus der gegebenen Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche eines Kegels den Durchmesser eines

Cylinders zu finden, welcher mit ihm einerley Höhe und Inhalt hat.

Auflösung. Es sey des Kegels Durchmesser $= d$, seine Höhe $= a$ und der Durchmesser des zu findenden Cylinders $= x$, so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{d^2 \pi}{4} \times \frac{a}{3} = \frac{ad^2 \pi}{12}$, und jener des Cylinders $= \frac{x^2 \pi}{4} \times a = \frac{ax^2 \pi}{4}$. Daher wird die Gleichung

$$\frac{ad^2 \pi}{12} = \frac{ax^2 \pi}{4}$$

$$\frac{d^2}{12} = \frac{x^2}{4}$$

$$4d^2 = 12x^2$$

$$d^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{d^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = d \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Geometrische Construction. Aus $x^2 = \frac{d^2}{3}$, folget $x^2 = \frac{d}{3} \times d$, folglich $\frac{d}{3} : x = x : d$. Daher ist der zu findende Durchmesser die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem gegebenen Durchmesser und dem dritten Theile dieses Durchmessers.

§. 151.

XVII. Aufgabe. Den Durchmesser einer Kugel zu finden, in welche ein gegebener Würfel beschrieben werden soll.

Auflösung. Wenn man sich eine grade Linie von einem Winkelpuncte des Würfels durch seine Mitte nach dem entgegengesetzten Winkelpuncte vorstellet, so ist diese der Durchmesser der zu construirenden Kugel. Leget man durch diese Linie eine Diagonalebene, so entstehet ein rechtwinkeliges Dreyeck, dessen Hypotenuse die eben bemerkte Linie, dessen eine Cathete die eine Seite des Würfels und dessen andere Cathete die Diagonale der Seitenfläche dieses Würfels ist. Setzt man nun des Würfels Seite $= a$, so wird dieser Diagonallinie Quadrat $= 2a^2$, und folglich das Quadrat der durch den Würfel gezogenen Querlinie $= 2a^2 + a^2 = 3a^2$. Daher ist, wenn diese Querlinie x heißt,

$$x^2 = 3a^2$$

$$x = \sqrt{3a^2}$$

Geometrische Construction. Sollte dieser Werth von x nach der gefundenen Formel construirt werden, so ist

$$3a : x = x : a$$

Es kömmt also nur darauf an, zwischen $3a$ und a eine mittlere geometrische Proportionallinie zu finden, welche $= x$ seyn wird.

§. 152.

Zusatz. Aus der Formel

$x^2 = 3a^2$, folget

$$\frac{x^2}{3} = a^2 \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{3}} = a.$$

Wenn daher x bekannt ist, so kann a gefunden werden, d. h. es läßt sich aus dem gegebenen Durchmesser einer Kugel die Seite des Würfels finden, welcher in dieselbe beschrieben werden kann.

Da aus der Gleichung $a^2 = \frac{x^2}{3}$ die Proportion

$\frac{x}{3} : a = a : x$ folget, so kann der Werth von a leicht durch Construction gefunden werden, wenn man zu $\frac{x}{3}$ und x die mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

§. 153.

XVIII. Aufgabe. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher entstehet, indem sich ein Kreisabschnitt um den mit dessen Sehne parallelen Durchmesser einmal ganz herumbeweget.

Auflösung. Es sey CFK (*Fig.* 19.) der gegebene Abschnitt des Kreises ALHK, so soll der Inhalt des ringförmigen Körpers gefunden werden, welcher durch Umdrehung dieses Abschnittes um den Durchmesser AH erzeugt wird.

Da durch Umdrehung des Halbkreises AKH um A H eine Kugel, durch Umdrehung der Ebenen ADC und HGF aber Kugelabschnitte, und durch Umwälzung des Rechtecks DCFG ein senkrechter Cylinder entstehet, so darf man nur

von dem Inhalte der Kugel jenen der beyden Abschnitte und dieses Cylinders hinwegnehmen, um den Körperinhalt des ringförmigen Körpers zu erhalten.

Setzt man nun die Höhe der Kugelabschnitte AD = HG = h, den Halbmesser der Kugel = r, so ist aus der Stereometrie bekannt, daß der Abschnitt BAC = $\frac{1}{3}\pi h^2 \times (3r - h) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$ folglich Abschn. BAC + Abschn. JHF = $2\pi h^2 r - \frac{2}{3}\pi h^3$.

Nun ist DC, als mittlere Proportionallinie zwischen AD und DH,

$$= \sqrt{\left(h \times (2r - h)\right)} = \sqrt{(2rh - h^2)};$$

folglich ist die Fläche des Kreises um DC = $\pi\,(2rh - h^2)$.

Da nun DG = $2r - 2h$, so wird der Inhalt des Cylinders BCFJ = $(2\pi hr - \pi h^2) \cdot (2r - 2h) = 2\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 6\pi h^2 r$.

Hiezu die zwey Abschn. = $-\frac{2}{3}\pi h^3 + 2\pi h^2 r$

addirt, giebt zur Summe $\frac{4}{3}\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 4\pi h^2 r$.

Da nun der Kugel ALHF Inhalt = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ist, so wird, wenn der Inhalt des ringförmigen Körpers x heißt,

$$x = \frac{4}{3}\pi r^3 - \left(\frac{4}{3}\pi h^3 + 4\pi hr^2 - 4\pi h^2 r\right)$$

$$x = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi h^3 - 4\pi hr^2 + 4\pi h^2 r.$$

$$x = \frac{4}{3}\pi\,(r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3).$$

Da nun dieser Werth von x den Inhalt einer Kugel ausdrückt, deren Halbmesser = $r - h$ ist, dieses $r - h$ aber

so groß ist, wie DE oder $\frac{1}{2}$ CF, so erhellet, daß der Inhalt des ringförmigen Körpers dem Inhalte einer Kugel von dem Durchmesser CF gleich ist.

---

§. 154.

XIX. **Aufgabe.** Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyecks und den daranliegenden Winkeln dessen Höhe zu finden.

Auflösung. In dem Dreyecke LHJ (*Fig.* 20.) ist HJ $= a$, nebst den Winkeln H und J gegeben; man suchet das Loth LM $= x$.

Hier ist

$$sin.\ o : cos.\ o = x : \frac{cos.\ o \times x}{sin.\ o} \ (= \text{MJ}) \text{ ferner}$$

$$sin.\ u : cos.\ u = x : \frac{cos.\ u \times x}{sin.\ u} \ (= \text{MH})$$

Folglich hat man

$$\frac{cos.\ o \times x}{sin.\ o} + \frac{cos.\ u \times x}{sin.\ u} = a \ (= \text{HJ})$$

$$x \times \left(\frac{cos.\ o}{sin.\ o} + \frac{cos.\ u}{sin.\ u}\right) = a$$

$$x = \frac{a}{\frac{cos.\ o}{sin.\ o} + \frac{cos.\ u}{sin.\ u}} =$$

$$\frac{a}{\frac{cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o}{sin.\ o \times sin.\ u}}$$

$$\frac{a \times sin.\ o \times sin.\ u}{cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o} \quad (A)$$

§. 155.

Zusatz. I. Da die Factoren *sin. o*, *sin. u*, *cos. o* und *cos. u* Decimalbrüche sind, welche aus vielen Decimalstellen bestehen, so rechnet man den Werth von x am bequemsten durch Logarithmen.

II. Aus der Formel (A) fließet folgende Proportion:
$cos.\ o \times sin.\ u + cos.\ u \times sin.\ o : sin.\ o \times sin\ u = a : x$, d. h. die Summe der Rechtecke aus Cosinus des einen der gegebenen Winkel in den Sinus des andern verhält sich zu dem Rechtecke aus den beyden

Sinus dieser Winkel, wie des Dreyecks Grundlinie zu seiner Höhe.

§. 156.

XX. Aufgabe. Aus der Summe zweyer Seiten eines Dreyecks und den ihnen gegenüber liegenden Winkeln jene Seiten selbst zu finden.

In dem Dreyecke HLJ (*Fig.* 20.) sey HL + LJ und die Winkel H und J gegeben. Man sucht die Seiten LH und LJ selbst.

Auflösung. Es sey HL + LJ = a, und HL = x, so ist LJ = $a - x$, und man hat

$$x : sin.\, o = a - x : sin.\, u$$

$$x \times sin.\, u = (a - x) \times sin.\, o$$

$$x \times sin.\, u = a \,.\, sin.\, o - x\, sin.\, o\,.$$

$$x \times sin.\, u + x\, sin.\, o = a \times sin.\, o$$

$$x = \frac{a \times sin.\, o}{sin.\, u + sin.\, o}\ (A).$$ Da nun

LJ $= a - x$, so wird

$$a - x = a - \frac{a \times sin.\, o}{sin.\, u + sin.\, o}, \text{ oder}$$

$$a - x = \frac{a \times sin.\, u}{sin.\, u + sin\, o} \quad (B)$$

§. 157.

Zusatz. Aus (A) (§. 156) folget

$sin.\, u + sin.\, o : sin.\, o = a : x$, und aus (B) ist

$sin.\, u + sin.\, o : sin.\, u = a : a - x$, welches mit Worten ausgedruckt, folgender Lehrsatz giebt: Die Summe der Sinus beyder gegebenen Winkel verhält sich zum Sinus des einen dieser Winkel, wie die Summe der gegebenen Seiten des Dreyecks zu jener Seite, welche diesem einen Winkel gegenüber liegt.

§. 158.

XXI. Aufgabe. Aus den beyden an der Grundlinie eines Dreyecks liegenden Winkeln und und dem einen Segmente der Grundlinie, welches durch das von der Spitze auf sie gezogene Loth bestimmt wird, das andere Segment dieser Grundlinie zu finden.

Wenn im $\triangle$ LHJ (*Fig.* 20.) $<$ H, $<$ J und HM gegeben sind, so soll MJ gefunden werden.

Auflösung. Es sey HM $= a$, MJ $= x$, so ist

$$\cos. u : \sin. u = a : \frac{a \times \sin. u}{\cos. u} \; (= \text{LM}) \text{ ferner}$$

$$\cos. o : \sin. o = x : \frac{x \times \sin. o}{\cos. o} \; (= \text{LM}) \text{ folglich}$$

$$\frac{x \times \sin. o}{\cos. o} = \frac{a \times \sin. u}{\cos. u}$$

$$x = \frac{a \times \sin. u}{\cos u} \times \frac{\cos. o}{\sin. o}$$

$$x = \frac{a \times \sin. u \times \cos o}{\cos. u \times \sin o} \quad (A)$$

§. 159.

Zusatz. Aus dieser Gleichung (A) folget die Proportion

$$\cos. u \times \sin. o : \sin. u \times \cos. o = a : x,$$

welche folgenden allgemeinen Lehrsatz enthält: Das Recht-

eck aus dem Cosinus des an dem gegebenen Segmente liegenden Winkels in den Sinus des andern Winkels verhält sich zu dem Rechtecke aus dem Sinus des ersten in den Cosinus des andern Winkels, wie das gegebene Segment zu dem zu findenden Segmente.

§. 160.

XXII. Aufgabe. Aus dem Flächeninhalte eines rechtwinkeligen Dreyecks und einem seiner spitzen Winkel die beyden Catheten zu finden.

Es sey in dem △ ABC, (*Fig.* 21.) der Flächeninhalt $= b^2$, und $< B$ gegeben; man soll AB und AC finden. Setzt man die eine Cathete $AB = x$, so wird $b^2 = \frac{AC \times x}{2}$, folglich $\frac{2b^2}{x} = AC$, und es ist

$$x : \frac{2b^2}{x} = sin.\ tot. : tang.\ o$$

$$x^2 : 2b^2 = sin.\ tot. : tang.\ o$$

$$x^2 = \frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o} \quad (A)$$

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o}}.$$

§. 161.

Zusatz. 1. Aus (A) fließet die Proportion:

$$tang.\, o : sin.\, tot. = 2b^2 : x^2 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\, tang.\, o : sin.\, tot. = b^2 : x^2 \text{ d. h.}$$

die halbe Tangente des gegebenen Winkels verhält sich zum Sinus totus, wie des Dreyecks Inhalt zum Quadrate der an jenem Winkel liegenden Cathete.

II. Zur geometrischen Construction des Werthes

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\, tot.}{tang.\, o}}$$

nehme man auf dem Schenkel DH (*Fig.* 22.) des gegebenen Winkels EDH = *o* die DA = 2*b*, und errichte in A das Loth AE auf HJ, so ist, für DA als Sinus totus, AE = *tang. o*. Nun werde EA rückwärts verlängert, bis das auf ED errichtete Loth DG sie in G schneidet, so ist, wegen EA : AD = AD : AG, die AG = $\frac{AD \times AD}{AE} = \frac{2b \times sin.\, tot.}{tang.\, o}$. Nun mache man AH = AG, und AJ = $\frac{1}{2}$ AD = *b*, beschreibe über

AH + AJ einen Halbkreis, so ist $AL = \sqrt{AH \times AJ} = \sqrt{AG \times \frac{1}{2} AD} = \sqrt{\frac{2b^2 \times sin.\ tot.}{tang.\ o}}$. Nimmt man nun AB = AL, und zieht BC # DE, so ist BAC das gesuchte Dreyeck.

Zweyte Abtheilung.

Die höhere Geometrie.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 162.

Erklärung. Die bisherigen Beyspiele von der Anwendung algebraischer Lehren auf die Geometrie haben die Methode erläutert, nach welcher aus den gegebenen Bedingnissen der Aufgaben die Gleichungen gebildet und aufgelöset werden, und wie man sodann wieder im Stande ist, den gefundenen algebraischen Ausdruck für das Unbekannte durch eine geometrische Größe darzustellen, d. h. diesen Ausdruck zu construiren.

Gleichwie also diese Formeln aus geometrischer Quelle entsprungen und durch algebraische Behandlung aufgefunden worden sind, so können sie hinwiederum zu ihrer ersten Quelle zurückgeführt werden, um diesen wissenschaftlichen Kreis hierdurch abzuschließen. Alle seither betrachteten Aufgaben dieser Art führten uns zu bestimmten Gleichungen (§. 55.) worin der Werth des Unbekannten ein einziger, oder, bey quadratischen Gleichungen, nach $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ ein

doppelter war. Außer diesem giebt es aber eine zweyte Classe von Aufgaben, welche auf unbestimmten Gleichungen beruhen, und deren Inbegriff die höhere Geometrie genannt wird. Die krummen Linien oder Curven, die krummen Flächen und die durch letztere eingeschlossenen Körper gehören in das weite Gebiet ihrer Untersuchungen. Nur die allerersten Elemente davon können hier vorgetragen werden. Zuerst, als Erläuterung einiger Grundbegriffe dieser Lehre, von der graden Linie.

§. 163.

Aufgabe. Die Natur der graden Linie durch eine algebraische Gleichung auszudrücken.

Auflösung. Die gegebene grade Linie sey AB (Fig. 23.) Man schneide sie in dem willkührlichen Puncte E durch die grade CD, nehme EF nach Belieben, errichte aus F auf ED das Loth FG so sind $\angle$ E nebst EF und FG als gegebene Größen anzusehen. Nimmt man nun ferner FH willkührlich, und errichtet HK senkrecht auf ED, so ist, weil $\triangle$ GEF $\sim$ $\triangle$ KEH, EF : FG = EH : HK.

Nähme man FH = FL, so würde HK = LM, und es wäre EF : FG = EL : LM.

Hieraus folget, daß das Verhältniß von EF : FG ein beständiges und unveränderliches für alle auf ED zu nehmenden Segmenten und den aus ihren Endpuncten zu errichtenden Lothen sey. Diese Segmente EH, EL.... müssen also gleich den Lothen HK, LM... als veränderliche Größen betrachtet werden, weil jedes Segment nach Belieben genommen werden kann, und jedem Segmente ein besonderes Loth entspricht. Drückt man nun die beständigen Größen EF und FG durch die ersten Buchstaben des Alphabets a und b; die veränderlichen EH, HK, oder EL, LM u. s. w. durch die letzteren Buchstaben x nnd y aus, so ist

$a : b = x : y$ folglich

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Da nun x jedes Segment auf ED, und y jedes diesem Segmente entsprechende Loth darstellt, so ist diese Gleichung allgemein und giebt für jedes nach Belieben genommene x einen bestimmten Werth von y. Daher drückt diese Gleichung die Natur der graden Linie EB algebraisch aus.

§. 164.

Zusatz. I. Setzt man in dieser Gleichung $y = \frac{b}{a} x$ den Werth von $x = o$, so wird das Product $\frac{b}{a} x = o$; folglich auch $y = o$. Dies stimmt aufs Genaueste mit der Figur überein; denn wenn z. B. EH = o, so fällt H in E, und das Loth HK verschwindet hier.

II. Wäre $x = a$, so giebt die Gleichung $y = \frac{b}{a} \times a = b$. Denn wenn das Segment EH = EF wird, so muß das Loth HK = FG seyn.

III. Nähme man $x \gtrless a$, so würde auch $y \gtrless b$. Denn wenn die Segmente größer oder kleiner als EF werden, so müssen auch die ihnen zukommenden Lothe größer und kleiner als FG seyn.

IV. Würde x negativ, so giebt die Gleichung, da nun $\frac{b}{a} \times x = -\frac{bx}{a}$ wird, auch für y einen negativen Werth. Denn, wenn die Segmente in einer der FG entgegengesetzten

Lage, d. h. auf EC genommen werden, wie z. B. EN, so wird auch das denselben zugehörige Loth NQ der Lage nach dem Lothe FG entgegengesetzt seyn.

§. 165.

Anmerkung. Aus dem bisherigen erhellet, daß es nicht nothwendig sey, die Linie FG senkrecht auf EF zu ziehen, der $\angle$ EFG kann $\gtrless$ R seyn; nur müssen in jedem Falle die folgenden Linien HK, LM ... mit FG gleichlaufend seyn, wodurch jede von ihnen mit der ED gleichen Neigungswinkel bildet.

§. 166.

Erklärung. Die Linie CD, auf welcher die Segmente EH, EL, ... EN ... genommen werden, heißt die Abscissenlinie; der Punct E, von welchem dieselben ausgehen, der Anfangspunct der Abscissen; die von diesem Puncte genommenen Segmente EH, EL, ... EN ... nennt man die Abscissen; die diesen Abscissen zugehörigen Linien HK, LM ... NQ ... die Ordinaten; Abscissen und dazugehörige Ordinaten gemeinschaftlich die Coordinaten, und zwar rechtwinkelige, wenn der Coordinatenwinkel KHE = MLE ... = R ist; wo nicht, so sind es schiefwinkelige Coordinaten. Man pflegt die Abscissen immer mit x, die Ordinaten mit y zu bezeichnen.

§. 167.

Erklärung. I. Die Gleichung für eine Linie ist eine theils durch zwey veränderliche, theils durch beständige Größen ausgedrückte Gleichung, welche die Natur dieser Linie genau darstellet. Die eben gefundene $y = \frac{b}{a} x$ ist die

Gleichung zur graden Linie, weil die Natur jeder graden Linie durch sie bestimmt wird.

II. Eine Linie heißt algebraisch, wenn ihre Natur durch eine algebraische Gleichung ausgedrückt werden kann. Daher ist die grade Linie eine algebraische.

III. Eine algebraische Linie heißt von der 1ten, 2ten .... $n$ten Ordnung, wenn das unbekannte y in ihr sich auf der 1ten, 2ten, $n$ten Potenz befindet. — Die Gleichung für die grade Linie ist daher eine von der ersten Ordnung.

§. 168.

Aufgabe. Die Linie zu bestimmen, welche der Gleichung $y = \frac{b}{a} x$ zugehöret.

Auflösung. Aus $y = \frac{b}{a} x$ folget $a : b = x : y$. Nimmt man nun (Fig. 23) auf der graden Linie CD den Punct E als Anfangspunct der Abscissen, setzt EF $= a$, das Loth FG $= b$, und EH $= x$, so muß y die vierte Proportionallinie zu EF, FG und EH seyn. Diese wird aber gefunden, wenn man die grade EG so lange verlängert, bis das aus H auf ED errichtete Loth HK von ihr in K geschnitten wird. Folglich befindet sich K in der zu findenden Linie, und HK ist die zur Abscisse x gehörige Ordinate y. Da dieses nun eben so von allen andern Ordinaten, wie LM . . . gilt, so ist die grade EGK MB. . . die zu findende Linie.

§. 169.

Zusatz. I. Wenn die gegebene Gleichung $y = \frac{b}{a} x +$

c (A) wäre, so würde die dazu gehörige Linie ebenfalls eine grade seyn. Denn

1.) Für $x = o$ wird $\frac{b}{a} x = o$, folglich $y = + c$ d. h. in dem Anfangspuncte der Abscissen ist die Ordinate $= + c$. Nimmt man also AE (Fig. 24) als Abscissenlinie, B als Anfangspunct der Abscissen an, und errichtet hier eine Linie BF $= + c$ unter einem beliebigen Coordinatenwinkel ABF, so liegt der Punct F in der zu construirenden Linie.

2.) Setzt man in der Gleichung (A) $y = o$, um den Punct in der Abscissenlinie zu finden, wo die Ordinate verschwindet, so wird $\frac{b}{a} x + c = o$, folglich

$$\frac{b}{a} x = - c, \text{ und}$$

$$bx = - ac$$

$$x = - \frac{ac}{b}$$

Dieser negative Werth von x bedeutet, daß die Abscisse, welche in der positiven Lage meist von B gegen E genommen werden, hier von B nach A hin zu nehmen sey. Um die Größe von x zu bestimmen, suche man zu b, a und c die vierte Proportionallinie, welches geschieht, wenn man FP $= b$ nimmt, durch P eine Parallele mit AE zieht, PQ $= a$, und endlich diese FQ nebst der EB bis zum Durchschnittspuncte A verlängert. Denn nun ist

$$BA = \frac{PQ \times BF}{FP}, \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{a \times c}{b}.$$

3.) Setzt man nun von B nach E auf BE für x irgend einen positiven Werth z. B. $x = BC$, so ist, wenn durch C die CG oder BF gleichlaufend gezogen, und CG und AF bis zu ihrem Durchschnittspuncte L verlängert werden, auch dieser Punct L in der zu findenden Linie. Denn wenn durch F die mit AE parallele FK gezogen wird, so ist $\triangle QPF \backsim \triangle FGL$ und man hat

$$QP : PF = FG : GL, \text{ oder}$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a} = GL.$$

Da nun $CG = BF = c$, so ist $CG + GL = \frac{bx}{a} + c$. Eben so wird für $x = BD$, die Ordinate $y = DM$ gefunden, und die zu construirende Linie geht durch die Puncte A, F, L, M und ist folglich eine grade.

§. 170.

Zusatz II. Da jede gegebene Gleichung, welche x und y auf der ersten Potenz enthält (ohne das Product xy zu bilden) unter der Form der obigen

$$y = \frac{b}{a} x + c$$

stehet, so folget, daß jede Gleichung vom ersten Grade, worin zwey unbekannte Größen durch bekannte verbunden sind, einer graden Linie zugehöre.

§. 171.

Aufgabe. Eine Gleichung für den Kreis zu finden, indem, bey rechtwinkeligen Coordinaten der Anfangspunct der Abscissen am Ende des Durchmessers genommen wird.

Auflösung. Es sey AHBM, (Fig. 25.) der gegebene Kreis und AB dessen Durchmesser. Nimmt man A als den

Anfangspunct der Abscissen, AC als eine Abscisse und CD als die ihr zugehörige senkrechte Ordinate an, so ist aus der Geometrie bekannt, daß $CD^2 = AC \times CB$. Setzt man daher $AB = a$, $AC = x$, $CD = y$, so wird

$$y^2 = x(a - x) \text{ oder}$$

$$y^2 = ax - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$$

Da nun jede Ordinate gerade ebenso bestimmt wird, so muß diese Gleichung allgemein seyn und die Natur des Kreises darstellen. Die veränderlichen Größen darin sind x und y, weil für jede veränderte x auch y verändert wird; die beständige Größe hingegen ist a als Durchmesser.

§. 172.

Zusatz I. Setzt man in der Gleichung $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$ die Abscisse $x = o$, so wird auch die Ordinate $y = o$, d. h. dem Anfangspuncte der Abscissen A entspricht auch keine Ordinate.

II. Wäre $x = \frac{a}{2}$ so wird

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \pm \frac{a}{2};$$

d. h. wenn die Abscisse AG wird, so ist $GH = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$ die zugehörige Ordinate.

III. Wird $x = a$, so erhält man $y = o$; denn wenn man AB zur Abscisse nimmt, so hat in B keine Ordinate mehr Statt.

IV. Da y einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen, hat, so gehören jeder Abscisse zwey gleichgroße, aber

in Rücksicht der Lage entgegengesetzte Ordinaten an. Dies ist auch wirklich der Fall, da der Abscisse AC die Ordinaten CD und CK; der Abscisse AE die Ordinaten EF und EL u. s. f. zukommen, welche einander gleich und entgegengesetzt sind.

V. Nimmt man eine Abscisse AN = BA — BN = AB — AE = Z = $a - x$, so wird $y = \pm \sqrt{[a(a-x) - (a-x)^2]}$, oder

$y = \pm \sqrt{[a^2 - ax - (a^2 - 2ax + x^2)]}$, oder

$y = \pm \sqrt{(a^2 - ax - a^2 + 2ax - x^2)}$, oder

$y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$. Denn wenn AE = BN, so sind die Lothe EF und NO von gleicher Größe.

VI. Aus allem diesem erhellet zur Genüge, daß die obige Gleichung $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$ die Natur und Eigenschaften des Kreises genau darstelle. Daher kann diese Gleichung als eine vollständige algebraische Erklärung des Kreises angesehen werden.

§. 173.

Erklärung. Eine gerade Linie [AB, (Fig. 25.)], welche die Ordinaten der Curve halbirt, heißt ihr Durchmesser und, wenn die Ordinaten auf ihr lothrecht stehen, ihre Axe; der Punct (A), worin die Curve (LAH) den Durchmesser oder die Axe schneidet, der Scheitel; und die vom Scheitelpuncte zu beyden Seiten der Curve ausgehenden Theile (ADFH) und (AKLM) die Schenkel der Curve.

§. 174.

Aufgabe. Die Linie zu bestimmen, welcher die Gleichung $y^2 = ax - x^2$ zugehöret.

Auflösung. Daß die zu bestimmende Linie keine grade

seyn könne, sondern eine krumme seyn müsse, läßt sich so beweisen. Wenn man die drey aufeinander folgenden Abscissen n, $2n$, $3n$, und die ihnen angehörigen Ordinaten y, y', y'' nennt, so ist nach der gegebenen Gleichung

$$y^2 = an - n^2 \quad (A)$$
$$(y')^2 = a2n - 4n^2 \quad (B)$$
$$(y'')^2 = a3n - 9n^2 \quad (C)$$

Wäre nun z. B. (Fig. 25.) AC $= n$, AE $= 2n$, AG $= 3n$, CD $= y$, EF $= y'$, GH $= y''$ und die Puncte D, F, H befänden sich in grader Linie, so müßte CD : EF : GH $=$ AC : AE : AG, oder $y : y' : y'' = n : 2n : 3n = 1 : 2 : 3$ folglich $y^2 : (y')^2 : (y'')^2 = 1 : 4 : 9$ seyn. Da dieses Verhältniß nun in den Gleichungen (A), (B) und (C) nicht Statt hat (wovon man sich sehr leicht überzeugen wird) so liegen die Endpuncte der Ordinaten y, y', y'' nicht in grader Linie und die zu bestimmende Linie muß eine Curve seyn.

Aus der gegebenen Gleichung folget (nach §. 172) ferner

1.) daß, wenn AB die beständige Größe a bedeutet, in dem Anfangspuncte der Abscissen A die Ordinate verschwinde, folglich von diesem Puncte A die Curve ausgehe (§. 172, I.)

2.) daß, wenn die Abscisse AG $= \frac{1}{2}$ AB gesetzt wird, die dazugehörige Ordinate GH auch $= \frac{1}{2}$ AB sey. (§. 172, II.).

3.) daß, für die Abscisse $=$ AB, die Ordinate $= o$ sey, folglich die Linie jetzt in B schneide. (§. 172, III.)

4.) daß jeder Abscisse, wie AC, AE . . . . zwey gleiche, nur der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten, wie CD, CK; EF, EL . . . . zukommen. (§. 172, IV.)

5.) daß alle Abscissen, wie AE, AN, deren eine in ihrem Endpuncte so weit von A als die andere in diesem Puncte

von B entfernt ist, gleichgroße Ordinaten, wie EF, NO haben. (§. 172, V.)

6.) fließet aus der Gleichung $y^2 = ax - x^2$ die Proportion $x : y = y : a - x$ d. h. jede Ordinate ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Segmenten der beständigen Größe a.

Da nun alle diese durch die gegebene Gleichung ausgesprochenen Eigenschaften nur dem Kreise zukommen, so gehört dieselbe auch nur der Kreislinie an.

§. 175.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Kreislinie zu finden; unter der Voraussetzung, daß der Anfangspunct der Abscissen in dem Mittelpuncte genommen wird.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey AFBGA (Fig. 26.) AB dessen Durchmesser und C der Mittelpunct. Nimmt man hier auf CB aus C die Abscisse CD, und errichtet aus D auf CB das Loth DF, so ist DF die dazu gehörige Ordinate. Zieht man nun den Halbmesser CF $= r$, so ist

$$CF^2 = CD^2 + DF^2$$

$$DF^2 = CF^2 - CD^2, \text{ d. h.}$$

$$y^2 = r^2 - x^2 \text{ und}$$

$x = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$ ist die gesuchte Gleichung.

Setzt man des Kreises Durchmesser $= d$, so wird nun $y^2 = \frac{d^2}{4} - x^2$, und $y = \pm \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - x^2\right)}$.

Zur Übung wird folgende Aufgabe dienen.

§. 176.

Aufgabe. Bey rechtwinkeligen Coordinaten die zur Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$ gehörige Linie zu finden.

Auflösung. I. Die zu dieser Gleichung gehörige Linie muß eine Curve seyn. Denn für die Abscissen x, $2x$, $3x$ wird

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$(y')^2 = r^2 - 4x^2$$
$$(y'')^2 = r^2 - 9x^2.$$

Wäre nun die Linie eine grade so müßte hier $y + y'' = 2y'$ seyn, oder

$$y^2 + 2yy'' + (y'')^2 = 4\,(y')^2.$$

Daß dieses Letztere aber nicht ist, lehret eine leichte Rechnung durch Substitution der Werthe von y, y' und y''. Es wäre nämlich:

$r^2 - x^2 + 2yy' + r^2 - 9x^2 = 4r^2 - 16x^2$ oder
$2yy' = 2r^2 - 6x^2$ und
$yy' = r^2 - 3x^2$. Erhebt man beyde Theile zum Quadrate, so wäre auch

$$y^2y'^2 = r^4 - 6r^2x^2 + 9x^4, \text{ oder}$$
$$r^4 - 10r^2x^2 + 9x^4 = r^4 - 6r^2x^2 + 9x^4,$$

woraus denn

$10r^2x^2 = 6r^2x$ d. h. ein Widerspruch folget.

II. Aus der Gleichung folget, daß $y = o$ wird, wenn man $x = r$ setzt. Für CD = CB liegt also ein Punct der Linie in B. — Für $x = o$ wird aber $y = r$. Also ist in dem Anfangspuncte der Abscissen C die Ordinate der beständigen Linie r gleich. Errichtet man also aus C auf BC das Loth CJ = CB = r, so ist auch L in der zufindenden Linie. Setzte man $x > r$, so wäre $r^2 - x^2$ negativ und y, als Quadratwurzel eines negativen Werthes, eine unmögliche Größe. Folglich hat die zu findende Linie für

Abscissen $>$ CB $= r$ keine Ordinaten mehr, und $x = r$ ist die größtmögliche Abscisse.

III. Für jede negative Abscisse $-x$, welche auf der der CB entgegengesetzten Abscissenlinie CA genommen werden müssen, findet man die zugehörige Ordinate folgendergestalt.

Da $y^2 = r^2 - x^2$, so ist auch $y^2 = (r + x) \times (r - x)$. Wird nun aus $+ x$ eine $- x$, so verwandelt sich der erste Factor $(r + x)$ jetzt in $(r - x)$ und der zweyte $(r - x)$ in $(r + x)$ und es ist

$$y^2 = (r - x) \times (r + x) = r^2 - x^2$$

wie vorhin. Nimmt man daher CL $=$ CD, errichtet in L das Loth LN $=$ DF, so befindet sich auch N in der Linie. Eben so für CM $=$ CE und das Loth MP $=$ EH, der Punct P u. s. f.

Für $- x = r$, wird $(- x)^2 = x^2 = r^2$ und $y = o$. Für CA $=$ CB liegt also ein Punct der Linie wieder in A.

IV. Da $y = + \sqrt{(r^2 - x^2)}$, so entspricht jedem x ein doppeltes y nämlich ein $+ y$ und ein $- y$. Errichtet man daher DG $=$ DF, EK $=$ EH, LO $=$ LN, MQ $=$ MP, so sind die Puncte G, K, O, Q . . . auch in der Linie.

V. Da nun alle diese Eigenschaften zusammengenommen nur der Kreislinie zukommen, so ist es erwiesen, daß die der Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$ angehörige Linie der Kreis sey.

§. 177.

Anmerkung. Die Aufgaben, welche in der höheren Geometrie vorkommen, sind von doppelter Art; indem man entweder zu einer gegebenen krummen Linie eine Gleichung suchet, welche ihre Natur darstellet, oder nach einer vorgege-

benen Gleichung diejenige krumme Linie konstruiren soll, welche jener Gleichung angehöret. Diese zwey Probleme, welche in dem Vorhergehenden an der graden Linie und dem Kreise erläutert worden sind, sollen nun auch auf die Curven, die man die **Kegelschnitte** heißt, angewendet werden.

Zweyter Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

I. Die Parabel.

§. 178.

Erklärung. Es sey DEF (Fig. 27.) ein senkrechter Kegel, EHFN seine Grundfläche, DR seine Axe, und EF der Durchmesser der Basis. Wird dieser Kegel von einer Ebene durch die Puncte D, E und F geschnitten, so steht diese Durchschnittsebene auf der Grundfläche lothrecht, und ist das Dreyeck DEF. Ist die Richtung des Schnittes parallel mit der Grundfläche z. B. nach AG, so entstehet ein Kreis. Diese Schnitte lehrt und betrachtet schon die Elementargeometrie. Geht die Richtung des Schnittes durch die mit des Kegels Seite DE gleichlaufende Linie AP und senkrecht auf das Durchschnitts-Dreyeck DEF, so entstehet auf der krummen Oberfläche des Kegels eine Curve HIAMN, welche man die **Parabel** nennt. Auch wird die von dieser

krummen Linie eingeschlossene Ebene, Parabel genennt. Die Ursache dieser Benennung wird unten angeführt werden.

§. 179.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden.

Auflösung. Man lege eine Ebene durch BC mit der Grundfläche gleichlaufend, so ist diese ein Kreis und die grade Linie BC dessen Durchmesser. Die Ebene der Parabel HIAMN schneidet die Kreise um BC und EF in den Linien IM und HN, welche auf den Durchmesser BC und EF lothrecht stehen; auch ist PJ = PM und QH = QN. Daher wird für die krumme Linie HJAMN die Linie AQ Abscissenlinie oder Axe. AP, AQ sind zwey Abscissen und PM, QN die ihnen zugehörigen Ordinaten.

2.) Da nun $\triangle DGA \sim \triangle APC$, so ist DG : GA = AP : PC, also $PC = \frac{GA \times AP}{DG.}$

Ferner hat man

$$PM^2 = BP \times PC\text{; folglich wird}$$

$$PM^2 = \frac{BP \times GA \times AP}{DG.}$$

Da aber BP = GA, so ist auch $PM^2 = \frac{GA^2 \times AP.}{DG}$

Setzt man nun die Ordinate PM = y, die Abscisse AP = x, so wird $y^2 = \frac{GA^2}{DG} \times x$. Da nun die Größe $\frac{GA^2}{DG}$, die Parabel HJAMN werde durch eine Parallelebene mit der Grundfläche wo immer geschnitten; immer unverändert bleibt, folglich eine beständige Größe ist, da in

diesem Falle x und y jedesmal andere Werthe erhalten; so kann man $\frac{AG^2}{CG} = p$ setzen, und die Gleichung für die Parabel wird in diese $y^2 = p\,x$ verwandelt.

§. 180.

Erklärung. Diese beständige Größe $\frac{AG^2}{DG} = p$ heißt der Parameter (Parabelmesser) weil bey einerley x die Ordinate y um so größer wird, je größer der Werth von $\frac{AG^2}{DG} = p$ ist.

§. 181.

Zusatz. I. In der Parabel ist daher das Quadrat der Ordinate dem Producte aus der Abscisse in den Parameter gleich.

II. Aus $\frac{AG^2}{DG} = p$ folget die Proportion

$$DG : AG = AG : p.$$

Daher ist der Parameter die dritte geometrische Proportionallinie zu DG und AG.

III. Aus $y^2 = p\,x$ wird

$$x : y = y : p.$$

Daher ist auch der Parameter die dritte geometrische Proportionallinie zur Abscisse und der ihr zugehörigen Ordinate.

IV. Hieraus fließet nun folgende Methode, die Parabel zu construiren. Wenn EA (Fig. 28.) der gegebene Parameter ist, so verlängere man denselben willkührlich nach B. Nimmt man nun aus A die willkührlichen Abscissen AP, AP, AP . . . . , beschreibet um alle Linien EA + AP Kreise, und errichtet in A auf EB das unbestimmte Loth

CAD, welches von diesen Kreisen in den Puncten R, R, R.. geschnitten wird, so sind diese AR, AR, ... die mittlere geometrischen Proportionallinien zwischen dem unveränderlichen Parameter EA und den veränderlichen Abscissen AP, AP ..... Errichtet man daher in den Puncten P, P ... unbestimmte Lothe MM, MM ...., welche man den Linien RR, RR .... der Ordnung nach gleichsetzt, so befinden sich die hierdurch entstehenden Puncte M, M, M .... in der Parabel, weil das Quadrat jeder Ordinate PM einem Producte aus der ihr zugehörigen Abscisse AP in den beständigen Parameter EA gleich ist. Nimmt man nun diese Abscissenpuncte P, P, P sehr nahe beysammen an, so kann man die durch Construction gefundenen Ordinatenpuncte M, M, M .... durch eine zusammenhängende Linie MMMAMMM ... verbinden, wodurch die Parabel construirt ist.

§. 182.

Aufgabe. Aus der Gleichung $y^2 = px$ die wichtigsten Eigenschaften der Parabel abzuleiten.

Auflösung. Nimmt man x, $2x$, $3x$ zu Abscissen und nennt die ihnen zugehörigen Ordinaten y, y', y'', so ist

$$y^2 = px$$
$$(y')^2 = 2px$$
$$(y'')^2 = 3px.$$

Lägen nun die Endpuncte dieser Ordinaten in gerader Linie, so müßte $y : y' : y'' = 1 : 2 : 3$, folglich $y^2 : (y')^2 : (y'')^2 = 1 : 4 : 9$ seyn. Da sich aber diese Ordinaten wie $px : 2px : 3px$ d. h. wie $1 : 2 : 3$ verhalten, so ist die zur Gleichung $y^2 = px$ gehörige Linie nothwendig eine Curve.

2.) Für $x = o$ wird auch px, folglich $y = o$; d. h. in dem Anfangspuncte der Abscissen in A hat keine Ordi-

nate Statt. Dieser Punct ist daher der Scheitel der Parabel; nämlich A (Fig. 28.)

3.) Wenn die Abscissen x größer werden, so wird das Product px größer, und daher auch die ihnen entsprechenden Ordinaten. Eben dieses lehret die Construction; da alle folgende Ordinaten PM, PM, PM . . . . größer werden. Die Schenkel der Parabel entfernen sich also immer mehr und mehr von ihrer Axe.

4.) Aus $y^2 = px$ folget, daß $y = \pm \sqrt{px}$; daher gehören zu jeder Abscisse zwey gleiche, nur der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten, wie ebenfalls aus der Construction erhellet.

5.) Nimmt man die Abscissen negativ, so wird $y = \pm \sqrt{-px}$, folglich eine unmögliche Größe. Daher befindet sich die ganze Parabel auf einer Seite der Linie CD und jenseits dieser Linie giebt es keine zur Parabel gehörige Ordinaten.

6.) Nennt man die zur Abscisse x' gehörige Ordinate y', so ist $y'^2 = px'$, und man hat

$$y^2 : y'^2 = px : px', \text{ oder}$$

$$y^2 : y'^2 = x : x',$$ d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich, wie die ihnen zugehörigen Abscissen.

7.) Aus (6) folget auch

$y : y' = \sqrt{x} : \sqrt{x'}$. Daher verhalten sich bey der Parabel die Ordinaten wie die Quadratwurzeln aus den ihnen angehörigen Abscissen.

§. 183.

Aufgabe. Einen Punct in der Axe zu finden, in welchem die daselbst errichtete Ordinate dem halben Parameter der Parabel gleich ist.

Auflösung. Da die Ordinaten in dem Scheitel $= o$ sind, und bis zu jeder Größe ins Unendliche anwachsen können, so folget hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit der Forderung.

Um die Lage dieses Punctes genau zu finden, setze man $y = \frac{1}{2} p$ in die Gleichung $y^2 = px$, so wird

$$\frac{1}{4} p^2 = px, \text{ folglich}$$
$$p^2 = 4 px, \text{ und}$$
$$p = 4 x, \text{ endlich}$$
$$\frac{1}{4} p = x.$$

Nimmt man daher (Fig. 29.) AF $= \frac{1}{4}$ Parameter EA, und errichtet in F die Ordinaten FM und Fm, so ist FM $=$ Fm $= \frac{1}{2}$ EA. Der gesuchte Punct liegt daher um den vierten Theil des Parameters auf der Axe von dem Scheitel entfernet.

§. 184.

Erklärung. Dieser so eben gefundene Punct heißt der Brennpunct; jede gerade Linie aus ihm zu irgend einem Puncte der Parabel, wie FM, FN, FO u. s. f. der Radiusvector der Parabel. Die Ursachen dieser Benennungen findet man unten.

§. 185.

Aufgabe. Aus dem Parameter und der Abscisse den Radiusvector zu bestimmen.

Auflösung. In der Parabel (Fig. 29) sey F der Brennpunct, AP eine Abscisse, PN die ihr zugehörige Ordinate, und FN der Radiusvector; so ist $FN^2 = FP^2 + PN^2$. Da nun AP $= x$, und AF $= \frac{1}{4}p$; so ist FP $= x - \frac{1}{4}p$, und $FP^2 = (x - \frac{1}{4}p)^2$. Ferner ist $PN^2 = y^2$, und es wird $FN^2 = (x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2 =$

$(x - \frac{1}{4}p)^2 + px = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 + px = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Daher ist $FN = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2)} = x + \frac{1}{4}p$. Folglich ist der Radiusvector an jedem Puncte der Parabel der Summe aus der zu diesem Puncte gehörigen Abscisse nebst dem vierten Theile des Parameters gleich.

§. 186.

Zusatz. Hieraus folget eine zweite Methode zur Construction der Parabel, deren Parameter gegeben ist. Man nehme aus dem Scheitel A auf beiden Seiten der Axe die $AF = Af = \frac{1}{4}p$; so werden, für beliebige Abscissen AP, AQ, ... die Linien fP, fQ, ... die Summen $x + \frac{1}{4}p$ vorstellen. Errichtet man nun aus den Puncten P, Q, ... unbegrenzte Ordinaten, und durchschneidet solche aus F mit Bogen von den Radien fP, fQ, ..., so liegen die Puncte N, O, ... in der verlangten Parabel.

§. 187.

Aufgabe. Die Parabel vermittelst stetiger Bewegung in einem Zuge mechanisch zu verzeichnen.

Auflösung. Das Lineal CD (Fig. 30.) hat eine Falze, in welcher das Winkelmaaß HGI hin und her geschoben werden kann. Wenn nun fv die Axe der Parabel ist so nehme man $fF = \frac{1}{2}$ Parameter, und lege CD senkrecht an fv. Befestiget man nun an F und H einen Faden von der Länge GH, und verschiebet das Winkelmaaß von f nach D, indem man die Spitze eines Bleystifts an den gespannten Faden hält, so beschreibet diese eine parabolische Linie AMR; denn es ist für jeden Punct M der Radiusvector FM = GH — MH = MG = AP +

$Af = x + \frac{1}{4}p$. (Daher heißt jede Linie wie FM der Leitfaden, Radiusvector.)

§. 188.

Zusatz. Denket man sich anstatt des Lineals CD (vor. Fig.) eine gerade Linie CD (Fig. 31.) welche auf der Axe fv in der Entfernung $AF = \frac{1}{4}p$ jenseits des Brennpunctes F lothrecht steht, so hat diese Linie die Eigenschaft, daß alle Lothe MS, NT, OV, . . . aus willkührlichen Puncten der Parabel M, N, O, . . . auf dieselbe dem Radiusvector FM, FN, FO . . . gleich seyn müssen.

§. 189.

Diese Linie CD nennt man die Richtungslinie der Parabel (linea directrix.)

§. 190.

Aufgabe. An jeden gegebenen Punct der Parabel eine gerade Linie zu ziehen, welche nur diesen Punct mit ihr gemeinschaftlich hat.

Auflösung. Es sey, (Fig. 32.) RMAN die gegebene Parabel, und M der in ihr gewählte Punct. Man ziehe durch E die Richtungslinie EW, aus M das Loth MG darauf, und den Radiusvector MF. Wird nun der $\angle$ GMF durch MT halbirt, so ist diese TMS die gesuchte Tangente für den Punct M.

Beweis. Man ziehe FG, so ist, weil MG = MF, $\angle$ GMK = $\angle$ FMK, und MK = MK, $\triangle$ GKM $\cong$ $\triangle$ FKM, und bey K sind rechte Winkel. Hätte nun die Linie KS noch einen andern Punct, z. B. S mit der Parabel gemein, so müßte aus gleichen Gründen, wenn man FS und GS ziehet, auch FS = GS seyn. Wird aber aus

S das Loth SV auf EW gezogen, so wäre auch (§. 188.) VS = FS. Daher hätte man nun auch GS = VS. Da aber dieses wegen < GVS = R unmöglich ist, so kann der Punct S nicht in der Parabel liegen. Derselbige Beweis gilt von jedem andern Puncte, den man außer M in der Parabel nimmt, folglich ist er allgemein.

§. 191.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche die Parabel nur in einem Puncte berühret, wird die Berührungslinie oder Tangente der Parabel genennt.

§. 192.

Zusatz I. Da (Fig. 32.) < FMK = < GMK, und < GMK = < OMS, so ist auch < FMK = < OMS, und jede Linie, wie OM, welche mit der Axe der Parabel gleichlaufend ist, wird mit der Tangente an dem Puncte M denselben Winkel bilden, welchen der Radiusvector an diesem Puncte mit ihr bildet.

II. Auch kann noch, wenn der Punct M in der Parabel gegeben ist, die Tangente durch diesen Punct sehr leicht gefunden werden, indem man die Ordinate MP zieht, auf der über den Scheitel verlängerten Axe die AT = PA nimmt und die gerade TM zieht. Denn es ist, wegen < FKM = < FKT = R, < FMK = < GMK = < FTK und KF = KF, das △ FKM ≅ △ FKT; folglich FM = FT. Allein FM = $x + \frac{1}{4}p$ (§. 185.) und x = PA, $\frac{1}{4}p$ = FA (§. 183.); daher FM = FT = PA + FA, d. h. AT = PA.

§. 193.

Anmerkung. Wenn sich die Parabellinie um ihre feste

Axe herumdrehet, so bewirkt sie einen hohlen parabolischen Flächenraum. Denkt man sich denselben spiegelnd z. B. von polirtem Metalle, und hält diesen parabolischen Hohlspiegel gegen die Sonne, so zeigt sich im Punkte F sowohl eine sehr große Erleuchtung, als auch große Hitze. In der Optik wird nemlich erwiesen, daß die Sonnenstrahlen, welche auf Spiegelflächen fallen, unter demselbigen Winkel zurückgeworfen werden, worunter sie auftreffen. Stellen daher (Fig. 33.) die Linien SM, LT, $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$, u. s. f. Sonnenstrahlen vor, welche, wegen der großen Entfernung der Sonne als mit der Axe gleichlaufend angenommen werden können, so werden dieselbe durch die Zurückwerfung von Seiten des Hohlspiegels alle im Puncte F vereiniget. Hieraus erkennt man die Ursache, warum dieser Punct F der Brennpunct (§. 184.) genennt wird.

II. Die Ellipse.

§. 194.

Erklärung. Es sey CAB, (Fig. 34.) ein senkrechter Kegel, AB der Durchmesser seiner Grundfläche, C seine Spitze, und △ ACB das Durchschnittsdreyeck, welches auf der Grundfläche lothrecht stehet. Wird dieser Kegel mit einer Ebene nach der Richtung DE dergestalt durchschnitten, daß die verlängerte DE die verlängerte AB schneiden würde, so entstehet auf der krummen Oberfläche des Kegels eine krumme, in sich selbst zurücklaufende, Linie DGEFD, welche man die Ellipse nennet. Auch heißt die von der krummen Linie eingeschlossene Ebene selbst eine Ellipse. Die Linie DE wird ihre Axe genennt.

§. 195.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Auflösung. 1.) Wenn man in der Linie DE einen beliebigen Punct H annimmt, und durch denselben eine Ebene KL mit der Grundfläche AB gleichlaufend leget, so entstehet ein Kreis, der die Ellipse DE in der geraden Linie GF durchschneidet, und es ist klar, daß diese GF sowohl auf KL als auf DE lothrecht sey.

2.) Zieht man nun durch D und E die DM und EN gleichlaufend mit KL so ist △ DKH ∽ △ DNE, und △ EHL ∽ △ EDM. Daher hat man DE : EN = DH : HK, und ED : DM = EH : HL; folglich HK = $\frac{EN \times DH}{ED}$ und HL = $\frac{DM \times EH}{DE}$.

3.) Nun ist aber in dem Kreise um KL jedesmal HF^2 = KH × HL; daher wird $HF^2 = \frac{EN \times DH \times DM \times EH}{DE \times DE}$ $= \frac{EN \times DM}{DE} \times \frac{DH \times EH}{DE}$.

4.) Da nur die Linien EN, DM und DE für die Ellipse DGEFD beständige, DH, EH und HF aber veränderliche Größen sind, so setze man $\frac{EN \times DM}{DE}$, als vierte Proportionallinie zu DE, EN u. DM und als Parameter der Ellipse = p, die DE hingegen, als ihre Axe, = a, ferner die Ordinate HF = y, die Abscisse DH = x, und folglich EH = $a - x$. Nach dieser Bezeichnung wird nunmehr (aus 3.)

$$y^2 = \frac{p \times x \times (a - x)}{a} = \frac{apx - px^2}{a};$$

also $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$

Da nun jede andere Ordinate eben diesen Werth erhalten wird, so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ die zu findende Gleichung für die Ellipse.

§. 196.

Aufgabe. Aus der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ die wichtigsten Eigenschaften der Ellipse anzugeben.

Auflösung. 1.) Folget aus der Gleichung, daß $y = \pm \sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$ d. h. für jede Abscisse gehören zwey gleiche und nur der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten. Dies lehrt auch die Zeichnung, da man für DH als Abscisse HG = HF als angehörige Ordinaten erhält. Die Axe DE theilet somit die Ellipse in zwey congruente Hälften.

2.) Für $x = o$ wird auch $y = o$, folglich gehört zum Anfangspuncte D der Axe DE keine Ordinate, d. h. von D breitet sich die Ellipse von beyden Seiten der Axe aus. Für $x = a$ wird y ebenfalls $= o$, d. h. wenn die Abscisse der Axe gleich ist, so verschwindet die Ordinate gleichfalls, d. h. in E befindet sich ein zweyter Scheitel der Ellipse, und diese ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie.

3.) Wenn a immer größer wird, so nimmt $\frac{px^2}{a}$ immer ab, und wenn a unendlich groß genommen wird, so ist $\frac{px^2}{a} = o$, und jetzt ist in der Ellipse $y^2 = px$, d h. die Ellipse verwandelt sich nun in eine Parabel. Dies hat Statt, wenn der Schnitt nach DE mit CB gleichlaufend

ist; denn nun wird die gerade DE die verlängerte CB **nie** erreichen und DE kann als unendlich groß angesehen werden.

4.) Setzt man $x = \frac{a}{2}$ so wird $y^2 = \frac{pa}{2} - \left(\frac{p}{a} \times \frac{a^2}{4}\right)$ $= \frac{pa}{2} - \frac{pa}{4} = \frac{pa}{4}$ folglich $y = \pm \frac{\sqrt{pa}}{2}$ (A) Setzt man ferner $x < \frac{a}{2}$, und nimmt z. B. $x = \frac{a}{2} - n$, so wird nun $y^2 = p\left(\frac{a}{2} - n\right) - \frac{p}{a} \times \left(\frac{a}{2} - n\right)^2 =$

$\frac{ap}{2} - np - \frac{p}{a} \times \left(\frac{a^2}{4} - an + n^2\right) =$

$\frac{ap}{2} - np - \frac{a^2p}{4a} + \frac{anp}{a} - \frac{n^2p}{a} =$

$\frac{ap}{2} - \frac{ap}{4} - \frac{n^2p}{a}$. Daher denn $y = \pm \sqrt{\left(\frac{ap}{4} - \frac{n^2p}{a}\right)}$

(B) Setzt man nun ferner $x = \frac{a}{2} + n$, so wird $y^2 =$

$p\left(\frac{a}{2} + n\right) - \frac{p}{a} \times \left(\frac{a}{2} + n\right)^2 =$

$\frac{ap}{2} + np - \frac{p}{a} \times \left(\frac{a^2}{4} + an + n^2\right) =$

$\frac{ap}{2} + np - \frac{a^2p}{4a} - \frac{anp}{a} - \frac{n^2p}{a} =$

$\frac{ap}{2} - \frac{ap}{4} - \frac{n^2p}{a}$; folglich ist wieder $y = \pm \sqrt{\left(\frac{ap}{4} - \frac{n^2p}{4}\right)}$ (B) wie vorhin. Da nun jeder dieser Werthe (in B) kleiner ist, als der obige Werth (in A); so folgt erstlich

hieraus, daß jene Ordinate die größte sey, welche zu der halben Axe als Abscisse gehöret; zweytens, daß allen Abscissen, welche von der halben Axe um gleich vieles gegen die Scheitel der Ellipse entfernt sind, gleichgroße Ordinaten entsprechen.

§. 197.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche in der Mitte der großen Axe lothrecht errichtet, und bis zu beyden Seiten der Ellipse verlängert wird, heißt die kleine Axe, welche somit der Summe der beyden größten Ordinaten in der Ellipse gleich ist. Die beyden Axen theilen daher auch die Ellipse in vier congruente Quadranten ab. In (Fig. 35.) ist AB die große, Dd die kleine Axe, und ACD, BCD, BCd und ACd sind die vier elliptischen Quadranten.

§. 198.

Aufgabe. Den Parameter der Ellipse durch die beyden Axen zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man die kleine Axen α nennt, so ist (aus §. 192, N.^{ro} 4 A) $\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{ap}}{2}$; folglich $\alpha^2 = ap$, und daher $a : \alpha = \alpha : p$, d. h. der Parameter der Ellipse ist die dritte geometrische Proportionallinie zu ihrer großen und kleinen Axe.

§. 199.

Aufgabe. Aus der großen und kleinen Axe eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Auflösung. Da (nach §. 194.) $p = \frac{\alpha^2}{a}$, so setze man diesen Werth von p in die Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$;

so erhält man $y^2 = \frac{\alpha^2 x}{a} - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}$, oder auch $y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^4}\right)$, eine Gleichung, welche ebenfalls als eine mathematische Definition der Ellipse angesehen werden muß, und dazu dienen kann, ihre (oben §. 196 angeführte) Eigenschaften daraus abzuleiten.

§. 200.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, indem der Anfang der Abscissen in dem Mittelpunkte genommen wird.

Auflösung. Es sey C (Fig. 35) der Anfangspunct, und die Abscisse CP $= n$; so ist die zeitherige Abscisse AP, oder $x = \frac{a}{2} - n$. Setzt man diesen Werth für x in die Gleichung von y^2 (§. 199), so wird

$$y^2 = \alpha^2 \times \left\{ \frac{\frac{a}{2} - n}{a} - \frac{\left(\frac{a}{2} - n\right)^2}{a^2} \right\}, \text{ oder}$$

$$y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{a} - \frac{1}{4} + \frac{n}{a} - \frac{n^2}{a^2}\right), \text{ oder}$$

$$y^2 = \alpha^4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{n^2}{a^2}\right) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2 n^2}{a^2}.$$

§. 201.

Zusatz. I. Auch die hier gefundene Gleichung kann als eine Erklärung der Ellipse angesehen werden, aus welcher sich alle oben bemerkten Eigenschaften dieser Curve ableiten lassen.

II. Setzt man in dieser Gleichung $\alpha = a$, d. h. die kleine Axe der großen gleich; so ergiebt sich $y^2 = \frac{a^2}{4} - n^2$. Da nun diese Gleichung dem Kreise angehöret, wenn der Anfang der Abscissen in dem Mittelpuncte genommen wird (§. 175.), so folget, daß der Kreis eine Ellipse sey, deren beyde Axen einander gleich sind.

III. Je kleiner in obiger Gleichung α gegen a wird, desto kleiner muß auch y werden, da $y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{n^2}{a^2}\right)$ ist. Die Ellipse, deren Axe a ist, wird daher von dem Kreise, dessen Durchmesser ebenfalls a ist, um so mehr abweichen, je kleiner die kleine Axe gegen die große ist.

§. 202.

Aufgabe. Das Verhältniß zu bestimmen, in welchem die Ordinaten der Ellipse gegen einander stehen.

Auflösung. Es seyen AP und AQ (Fig. 35) zwey willkührliche Abscissen, und PM $= y$, QN $= z$ die ihnen zukommenden Ordinaten, so ist (nach §. 195.)

$y^2 : z^2 = p \times AP - \frac{p \times AP^2}{AB} : p \times AQ - \frac{p \times AQ^2}{AB}$, daher

$y^2 : z^2 = AP \times AB - AP \times AP : AQ \times AB - AQ \times AQ$,

und $y^2 : z^2 = AP \times (AB - AP) : AQ \times (AB - AQ)$ d. h.

$y^2 : z^2 = AP \times PB : AQ \times QB$.

Daher verhalten sich in der Ellipse die Quadrate der Ordinaten wie die Rechtecke aus den Segmenten der großen Axe, welche jenen Ordinaten angehören.

§. 203.

Anmerkung. Da in dem Kreise die Quadrate der Or-

dinaten den Rechtecken aus den ihnen zugehörigen Abschnitten des Durchmessers gleich sind (§. 174, 6.), so ergiebt sich hieraus sowohl eine Übereinstimmung als Verschiedenheit der Ellipse und des Kreises.

§. 204.

Aufgabe. Eine Ellipse vermittelst des Kreises zu beschreiben.

Auflösung. Wenn über die Linie AB (Fig. 36) eine Ellipse construirt werden soll, so halbire man AB in Q, beschreibe mit QA den Halbkreis APB, nehme in AB beliebige Puncte K, M, O, D, F.... an, und errichte die Ordinaten KI, ML, ON, QP, DC, FE. . . Macht man nun $FH = \frac{1}{n} FE$, $DG = \frac{1}{n} DC$, $QR = \frac{1}{n} QP \ldots$; so liegen die Puncte H, G, R, S, T, V.... in der Ellipse.

Denn da $GD = \frac{CD}{n}$, und auch $HF = \frac{EF}{n}$; so ist

$$GD^2 : HF^2 = \frac{CD^2}{n^2} : \frac{EF^2}{n^2} = CD^2 : EF^2,$$

aber $CD^2 : EF^2 = AD \times DB : AF \times FB$,

folglich $GD^2 : HF^2 = AD \times DB : AF \times FB$;

Daher befindet sich G und H in einer Ellipse (§. 202.). Eben dies gilt von den übrigen Puncten R, S, T. .

§. 205.

Zusatz. In diesem Falle wird QR die kleine Axe der Ellipse. Würden hingegen die Ordinaten KI, ML, ON, QP . . . , um gleiche aliquote Theile der Ganzen verlängert, so lägen ihre Endpuncte ebenfalls in einer Ellipse, und

nun wäre AB ihre kleine Axe, die verlängerte QP hingegen die Hälfte der großen.

§. 206.

Aufgabe. Einen Punct in der Axe zu finden, in welchem die daselbst errichtete Ordinate dem halben Parameter gleich ist.

Auflösung. 1. Da (nach §. 198.)

$\alpha^2 = ap$ ist, so hat man auch $\frac{\alpha^2}{a} = p$.

Da nun $a > \alpha$ ist, so muß auch $\frac{\alpha^2}{a} < \alpha$ seyn, d. h. der Parameter der Ellipse ist jedesmal kleiner als ihre kleine Axe, und folglich die halbe kleine Axe größer als der halbe Parameter. Hieraus ergiebt sich vorerst die Möglichkeit der Aufgabe.

2.) Da $y = \frac{p}{2}$ seyn soll, so wird $y^2 = \frac{p^2}{4}$, da aber $p = \frac{\alpha^2}{a}$ (§. 198.) so ist $y^2 = \frac{\alpha^4}{4a^2}$, und man hat (nach §. 200.) $\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2 n^2}{a^2} = \frac{\alpha^4}{4a^2}$, in welcher Gleichung der Werth von n, als Abscisse vom Mittelpuncte, zu bestimmen ist. Es wird nämlich $\frac{1}{4} - \frac{n^2}{a^2} = \frac{\alpha^2}{4a^2}$, oder

$$\frac{a^2}{4} - n^2 = \frac{\alpha^2}{4}, \text{ folglich}$$

$$\frac{a - \alpha^2}{4} = n^2, \text{ und } n = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - \alpha^2)}}{2}.$$

Es giebt folglich auf jeder Seite des Mittelpunctes der Ellipse C (Fig. 35.) einen Punct F und f, der die ver-

langte Eigenschaft hat, daß die aus ihnen errichtete Ordinaten dem halben Parameter gleich sind.

§. 207.

Erklärung. Diese beyde Puncte F und f nennet man (aus ähnlichen Ursachen, wie oben (§. 184.) für die Parabel) die Brennpuncte der Ellipse; die Entfernung dieser zwey Puncte von der Mitte C, nämlich CF = cf, ihre Eccentricität.

§. 208.

Aufgabe. Aus der gegebenen großen und kleinen Axe der Ellipse die Lage ihrer Brennpuncte durch Construction zu finden.

Auflösung. Auf der großen Axe AB Mitte C (Fig. 35.) errichte man die halbe kleine Axe CD lothrecht, beschreibe aus D mit dem Halbmesser CA = CB zwey Bogen, welche die große Axe in F und f schneiden, so sind F und f die zu bestimmenden Brennpuncte.

Denn $DF^2 = CD^2 + CF^2$; allein $CD^2 = \frac{\alpha^2}{4}$, und $CF^2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{4}$ (§. 206.) folglich wird $DF^2 = \frac{\alpha^2 + a^2 - \alpha^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ und $DF = \frac{a}{2}$.

§. 209.

Aufgabe. Die Größe einer geraden Linie zu bestimmen, welche aus dem Brennpuncte nach einem beliebigen Puncte des Umfanges der Ellipse gezogen wird.

Auflösung. 1. Wenn AEFD, (Fig. 37.) die halbe

Ellipse ist, so soll ein Ausdruck für SF gefunden werden. Man beschreibe über AD den Halbkreis ABD, und errichte die Lothe CEB und GFH auf AD; so ist $SF^2 = FH^2 + SH^2$, oder, da $SH^2 = SC^2 + 2SC.CH + CH^2$, $SF^2 = SC^2 + 2SC.CH + CH^2 + FH^2$.

2.) Da nun (nach §. 204.) BC : EC = GH : FH, so ist $FH^2 = \frac{EC^2 \times GH^2}{BC^2}$. Allein $GH^2 = CG^2 - CH^2 = CA^2 - CH^2$, und $BC^2 = CA^2$, folglich wird $FH^2 = EC^2 \times \frac{CA^2 - CH^2}{CA^2} = \frac{EC^2 \times CA^2}{CA^2} - \frac{CH^2 \times EC^2}{CA^2} = EC^2 - \frac{CH^2 \times EC^2}{CA^2}$.

3.) Daher wird nun (aus 1 und 2) $SF^2 = SC^2 + EC^2 + 2SC \times CH + CH^2 - \frac{CH^2 \times EC^2}{CA^2}$. Da aber $CH^2 - \frac{CH^2 \times EC^2}{CA^2} = \frac{CH^2 \times CA^2 - CH^2 \times EC^2}{CA^2} = CH^2 \times \frac{CA^2 - EC^2}{CA^2}$ ist, so wird

$$FS^2 = SC^2 + EC^2 + 2SC \times CH + CH^2 \times \frac{CA^2 - EC^2}{CA^2}.$$

Weil nun noch $SC^2 + EC^2 = SE^2 = CA^2$, und $CA^2 - EC^2 = SC^2$, so wird $FS^2 = CA^2 + 2SC \times CH + \frac{SC^2 \times CH^2}{CA^2}$.

4.) Zieht man nun beyderseits die Quadratwurzel aus, so ist $FS = CA + \frac{SC \times CH}{CA}$.

5.) Vollkommen auf ähnliche Art wird erwiesen, daß

$RF = CA - \frac{SC \cdot CH}{CA}$ sey, wenn das Loth FH zwischen C und R fällt.

§. 210.

Zusatz. Da FS hier durch die beständigen Größen SC und CA und die veränderliche CH bestimmt ist, so folget

I.) Für $CH = o$ wird $FS = CA = SE$, wie oben (§. 208.) bereits erwiesen worden ist.

II.) Wird $CH < o$, d. h. wenn CH negativ wird, indem H z. B. zwischen C und S fällt, so wird auch $\frac{SC \times CH}{CA}$ negativ und folglich $SF < CA$.

III.) Wenn H in A rückt, d. h. wenn $- CH = CA$ wird, so erhält man $SF = AC + \frac{SC \times - CA}{CA} = AC - SC = SA$. Daher ist SA die kleinste gerade Linie, welche aus S nach der Ellipse gezogen werden kann, die Linien wie SL, SM, . . . werden immer größer bis SE $= AC$ wird.

IV.) Nimmt man $CH = CD = AC$, so wird SF $= CA + \frac{SC \times CA}{CA} = CA + SC = SC + CD =$ SD, d. h. die Linien SF, SP, SQ, . . . werden immer größer, bis F in D rückt, wo SD die größtmögliche gerade Linie aus S nach der Ellipse wird.

§. 211.

Erklärung. Eine gerade Linie aus dem Brennpuncte nach der Ellipse heißt der Radiusvector oder Leitfaden. Die Ursache dieser Benennung wird sich sogleich zei-

gen. Von jedem Puncte in der Ellipse läßt sich nach jedem Brennpunct ein Radiusvector ziehen, nämlich von F sowohl FS als FR.

§. 212.

Lehrsatz. Die Summe je zweyer nach einerley Puncte der Ellipse gezogenen Radienvectoren ist ihrer größten Axe gleich.

Beweis. I. Befindet sich der gegebene Punct in E (Fig. 38.) am Ende der kleinen Axe, so ist, da $SE = AC$, und $RE = CD$ (§. 208.) von selbst klar, daß nun auch $SE + ER = AC + CD = AD$ seyn müsse.

II. Hat der gegebene Punct eine Lage wie F, so daß das Loth FH zwischen S und R fällt, so ist (nach §. 209, Nro. 4 und 5) $SF = CA + \frac{SC \times CH}{CA}$ und $RF = CA - \frac{SC \times CH}{CA}$; folglich $SF + RF = CA + CA = AD$.

III. Befände sich der Punct F lothrecht über dem Brennpuncte R in F′, so würde H in R gerückt seyn, und es wäre $CH = SC$; folglich hätte man nun $SF' = CA + \frac{SC^2}{CA}$, und $RF' = CA - \frac{SC^2}{CA}$; folglich wieder $SF^1 + RF^1 = 2CA = AD$.

IV. Rückte F nach F″, so daß das Loth F″W zwischen R und D in AD aufträfe, so würde $CH = CW$, und es müßte, da nun $SF'' = CA + \frac{SC \times CW}{CA}$, und $RF'' = CA - \frac{SC \times CW}{CA}$, auch hier wieder

SF'' + RF'' = AD seyn. Folglich ist der Satz allgemein bewiesen.

§. 213.

Aufgabe. Aus der gegebenen großen und kleinen Axe die Ellipse zu construiren.

Auflösung. Auf die Mitte der großen Axe AD (Fig. 39.) errichte man die halbe kleine Axe *CE* lothrecht, beschreibe aus E mit *CA* = *CD* den Bogen SKR; so sind S und R die Brennpuncte der Ellipse (§. 208). Werden nun aus S und R mit Halbmessern, deren Summe jedesmal = AD ist, nach Belieben Kreisbogen beschrieben, welche sich im L, M, N, O, P, Q, . . . schneiden, so befinden sich diese Puncte in der gesuchten Ellipse. Denn sollte die zu AD und *CE* gehörige Ellipse, z. B. oberhalb des Punctes L, durch V gehen, so müßte SV + VR = AD seyn (§. 212.), folglich wäre auch SV + VR = SL + LR. Letzteres ist aber widersprechend, da SV + VR > SL + LR seyn muß.

§. 214.

Aufgabe. Eine Ellipse durch mechanische Construction zu beschreiben.

Auflösung. I. Man nehme die große Axe AD (Fig. 39.) und Eccentricität *CS* nach Belieben auf einem ebenliegenden Papiere an, befestige in S und R zwei feine auf dessen Ebene lothrecht stehende Stahlstifte, z. B. starke englische Nähenadeln, und winde um R einen kreisförmig zusammenhängenden Faden von der Länge 2AR, der sich folglich bis A anspannen wird. Bringt man nun in die Oeffnung des Doppelfadens bey A ein wohlzugespitztes Bleystift und drehet dasselbe, bey immer angespannten Fäden, einmal

rings umher, so wird dasselbe die elliptische Linie auf dem Papiere beschreiben. Denn es ist in jedem Puncte L, M, N, O, P, Q, ... SL + LR = 2AR − SR = AR + AS = AR + RD = AD.

II. Vermittelst eines besondern Werkzeuges, welches man Ellipsograph nennt, auf folgende Art. AC und AB (Fig. 40.) sind zwey um A bewegliche, gleichlange Lineale, so daß CA + AB der halben Summe beyder Axen der zu construirenden Ellipse gleich ist. Auf AB kann nun BD nach Belieben als halbe kleine Axe genommen werden, so daß nun DA + AC die halbe große Axe ist. Setzt man nun die Spitze des Punctes C auf die gerade Linie MCN, bringt in D ein wohlzugespitztes Bleystift an, und fährt mit B längs des an NCM gelegten Lineals her, so beschreibet die Spitze in D die verlangte Ellipse.

Denn man nehme auf der verlängerten CA die AF = AE = AD, ziehe DE, DF und DG lothrecht auf CB, so ist < EDF = R, und, weil EA : AD = CA : AB = 1 : 1, ED ‖ CB, und < EDG = R. Daher ist auch FDG eine gerade Linie, und △ CFG ∽ △ EFD. Folglich hat man FG : DG = FC : EC, oder FG : DG = FC : DB. Nun beschreibet, bey Bewegung des Instrumentes, CF einen Kreis, D aber eine Curve, worin FG und DG zusammengehörige Ordinaten sind. Da diese aber jedesmal in dem beständigen Verhältnisse von CF : DB stehen, so muß die von D erzeugte Curve eine Ellipse seyn. (§. 204).

§. 215.

Aufgabe. An jeden gegebenen Punct der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Es sey BDMA, (Fig. 41.) eine gegebene halbe Ellipse, und M der in ihr angenommene Punct. Man ziehe die Radienvectoren fM und FM, verlängere fM nach I, und halbire den $< IMF$ durch die gerade MT; so ist diese MT, oder TML die verlangte Tangente für den Punct M. Denn sie wird, ausser M, keinen andern Punct mit der Ellipse gemein haben. Sollte z. B. K ein solcher gemeinschaftlicher Punct seyn, so nehme man MH $=$ MF, und ziehe HK und FK. Nun ist $\triangle$ MKH $\cong$ $\triangle$ MKF, folglich KH $=$ KF. Ziehet man fK, so wäre $fK + KF = fK + KH = fM + MF = fM + MH$; folglich $fK + KH = fH$, welches widersprechend ist.

§. 216.

Zusatz. Da $< HMK = < LMf$, und auch $< HMK = < FMT$; so ist $< fML = < FMT$, d. h. je zwey nach Belieben gezogene Radienvectoren bilden mit der in ihrem Vereinigungspuncte an die Ellipse gezogene Tangente zwey gleiche Winkel.

§. 217.

Anmerkung. Denket man sich hier einen elliptischen, wie oben (§. 193.) einen parabolischen Hohlspiegel, so werden die Lichtstrahlen, welche von dem einen Puncte F nach allen Richtungen hin ausgehen, durch die Reflexion von der elliptischen Fläche sich in dem andern Puncte f sammeln und hier sowohl Erleuchtung als Hitze hervorbringen. Ein kleines Kohlfeuer z. B. in F kann in f leicht brennbare Körper entzünden. Dies rechtfertiget auch bey der Ellipse die Namen: Brennpuncte für F und f.

§. 218.

Lehrsatz. Wenn in zwey Ellipsen die Verhältnisse der großen zu den kleinen Axen einander gleich sind, so stehen auch ihre Parameter in dem nämlichen Verhältnisse.

Beweis. Es seyen die großen Axen a, b, die kleinen α, β, die Parameter p, π; so ist $a : b = \alpha : \beta$ und folglich auch $a^2 : b^2 = \alpha^2 : \beta^2$. Da nun (nach §. 198.) $\alpha^2 = ap$, und $\beta^2 = b\pi$, so wird $\alpha^2 : b^2 = ap : b\pi$; folglich auch $\frac{a^2}{a} : \frac{b^2}{b} = p : \pi$, d. h. $a : b = p : \pi$.

§. 219.

Zusatz. I. Wäre $a : b = p : \pi$, so folgte auf ähnliche Weise $a : b = \alpha : \beta$. — Hätte man endlich $\alpha : \beta = p : \pi$, so wäre auch $\alpha : \beta = a : b$.

II. Es sey in zwey Ellipsen $a : b = \alpha : \beta = p : \pi$, ferner seyen n und m zwey aus ihrem Mittelpuncte genommene Abscissen, und man setze $a : b = n : m$, so wird $\alpha^2 : \beta^2 = a^2 : b^2$, folglich $\frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{\beta^2}{b^2}$ (A) und $a^2 : b^2 = n^2 : m^2$, daher auch $a^2 : b^2 = a^2 - n^2 : b^2 - m^2$ (B). Nennt man nun die zu n und m gehörigen Ordinaten y und z, so ist (nach §. 200)

$$y^2 : z^2 = \frac{a^2\alpha^2 - \alpha^2 n^2}{4a^2} : \frac{b^2\beta^2 - \beta^2 m^2}{4b^2}, \text{ oder}$$

$$y^2 : z^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} \times (a^2 - n^2) : \frac{\beta^2}{b^2} \times (b^2 - m^2), \text{ daher}$$

$y^2 : z^2 = a^2 - n^2 : b^2 - m^2$ (A), oder

$y^2 : z^2 = a^2 : b^2$ (B), d. h. $y : z = a : b = \alpha : \beta$, oder die Ordinaten verhalten sich hier wie die Axen der Ellipsen.

§. 220.

Erklärung. Ellipsen, worin die beständigen Größen (a, b, p und α, β, π) proportional sind, werden **ähnlich** genannt.

§. 221.

Zusatz. I. Wenn daher in den beyden Ellipsen (Fig. 42.) ADC und adc sich verhält AC : BD = ac : bd, so sind dieselbe einander ähnlich.

II. Nimmt man z. B. BE : be = AC : ac, so ist auch EF : ef = AC : ac. Wäre ferner BG : bg = BK : bk = AC : ac, so hätte man wieder GH : gh = KL : kl = AC : ac, d. h. in ähnlichen Ellipsen stehen ähnlich liegende Ordinaten sowohl unter sich in gleichem Verhältnisse, als auch in dem Verhältnisse der großen Axen.

III. Ähnliche Ellipsen sind daher, wie ähnliche Kreise, nicht der Gestalt, sondern nur der Größe nach unterschieden.

§. 222.

Anmerkung. Nennt man in zwey Parabeln, die Parameter p und π, die Abscissen a und α, die Ordinaten, welche ihnen zukommen, y und z; so ist hier $y^2 = pa$, und $z^2 = \pi\alpha$. Nimmt man nun $p : \pi = a : \alpha$, so ist $\alpha = \frac{\pi a}{p}$, folglich wird

$$y^2 : z^2 = pa : \frac{\pi^2 a}{p}, \text{ oder}$$

$$y^2 : z^2 = p^2 : \pi^2, \text{ d. h.}$$

$$y : z = p : \pi, \text{ oder}$$

die Ordinaten stehen hier im geraden Verhältnisse der Parameter. Daher sind alle Parabeln einander ähnlich, so wie alle Kreise und überhaupt alle Curven, in deren Gleichung

nur eine beständige Größe vorkömmt. Auch erhellet hieraus, daß die Ähnlichkeit der Curven überhaupt in der Proportionalität der in ihren Gleichungen vorkommenden beständigen Größen bestehe.

III. Die Hyperbel.

§. 223.

Erklärung. Wenn man in des senkrechten Kegels ACB, (Fig. 43.) Seite CB einen willkührlichen Punct D annimmt, und durch denselben eine Ebene leget, welche auf dem Durchschnittsdreyecke ACB lothrecht stehet, und eine solche Lage gegen die Grundfläche AB hat, daß sie in ihrer Verlängerung nach oben die nach *a* verlängerte Seite *AC* des Kegels in I z. B. durchschneiden würde, so entstehet hierdurch auf der krummen Kegelfläche eine Curve FDN, welche die Hyperbel genennt wird. Auch heißt die von dieser krummen Linie und der geraden FN begrenzte Ebene eine Hyperbel.

§. 224.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Auflösung. 1.) Wenn man in der Durchschnittslinie DK einen willkührlichen Punct E annimmt, und durch denselben eine Parallelebene HG mit der Grundfläche *A*B leget, so entstehet ein Kreis, welcher die Hyperbel im Puncte F schneidet, und die EF muß sowohl auf der geraden Linie HG als DM lothrecht stehen.

2) Wird nun die Seite *AC* und B*C* des Kegels *AC*B nach *a* und *b* verlängert, so kann man sich noch einen um-

gekehrten Kegel aCb denken, dessen Seite Ca von der verlängerten MD in I geschnitten wird. Ferner seyen durch D und I die DK und IL mit GH parallel gezogen, so ist

$$\triangle IDK \backsim \triangle IEH,$$ und auch

$$\triangle DIL \backsim \triangle DEG,$$ daher wird

$$ID : DK = IE : EH;$$ folglich

$$EH = \frac{DK \times IE}{ID};$$ ferner auch

$$DI : IL = DE : EG;$$ daher

$$EG = \frac{IL \times DE}{DI}.$$

3) Da aber in dem Kreise um GH jedesmal $EF^2 = HE \times EG$, so wird

$$EF^2 = \frac{DK \times IE \times IL \times DE}{DI^2} = \frac{DK \times IL}{DI} \times \frac{IE \times DE}{DI}.$$

4) Nun sind in diesem Ausdrucke für das Quadrat der Ordinate die Linien DK, DI und IL beständige, IE und DE aber veränderliche Größen in der Hyperbel DFN. Man setze daher $EF = y$, $DI = a$, $DE = x$; so ist $IE = a + x$. Nimmt man ferner $\frac{DK \times IL}{DI}$, als vierte Proportionallinie zu DI, DK und IL, als Parameter der Hyperbel, $= p$; so wird $y^2 = \frac{p \times (a + x) \times x}{a} = \frac{apx}{a} + \frac{px^2}{a} = px + \frac{px^2}{a}$, welches die zu findende Gleichung für die Hyperbel ist.

§. 225.

Aufgabe. Aus der Gleichung $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ die wichtigsten Eigenschaften der Hyperbel abzuleiten.

Auflösung. 1.) Folget aus der Gleichung

$y = \mp \sqrt{\left(px + \frac{px^2}{a}\right)}$, d. h. jeder Abcisse gehören zwey gleich große, nur der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten zu, und die Hyperbel hat zwey gleiche Schenkel, zwischen welchen sich die Abscissenlinie befindet. Dieses lehrt auch die Zeichnung (Fig. 43).

2.) Je größer x ist, desto größer wird auch der Werth von y, d. h. die Ordinaten der Hyperbel nehmen mit den Abscissen zu, und die Schenkel dieser Curve entfernen sich immer mehr von der Axe. Auch dieses folget aus Betrachtung der Figur.

3) Für $x = o$ wird auch $y = o$. Die beyden Schenkel der Hyperbel fallen also hier in einem Puncte zusammen, welcher der Scheitel ist. Dies ist in der Zeichnung der Punct D.

4.) Setzt man $x = -a$, so wird $y = \pm \sqrt{\left(-ap + \frac{a^2p}{a}\right)} = \pm \sqrt{\left(-ap + ap\right)} = o$, d. h. wenn zur Abscisse DI genommen wird, so hat in I keine Ordinate Statt. Nimmt man aber $x = -(a+m) = -a-m$, so wird $y = \pm \sqrt{\left(p(-a-m) + \frac{p(-a-m)^2}{a}\right)} = \pm \sqrt{\left(-ap - mp + \frac{a^2p + 2amp + m^2p}{a}\right)} = \pm \sqrt{\left(-ap - mp + ap + 2mp + \frac{m^2p}{a}\right)} = \pm \sqrt{\left(mp + \frac{m^2p}{a}\right)}$. Da diese Gleichung für die Abscisse $-m$ dieselbe ist, wie die Gleichung $\pm \sqrt{\left(px + \frac{px^2}{a}\right)}$ für die Abscisse x; so folget, daß sich oberhalb des Punctes I ebenfalls zwey Schenkel der Hyperbel, den vorigen in al-

lem gleich und nur in der Lage entgegengesetzt, hinerstrecken. Es entstehen also durch die Verlängerung der schneidenden Ebene NDF nach oben auf der Kegelfläche lCa ebenfalls zwey hyperbolische Schenkel If und In, welche mit jenen auf der untern Kegelfläche zusammen nur eine einzige Hyperbel bilden. — Setzte man aber $x = \frac{-a}{m}$, so daß diese negative Abscisse einem bestimmten Theile von ID $= a$ gleich wäre; so würde $y^2 = \frac{-pa}{m} + \frac{pa^2}{m^2 a} = \frac{-pa}{m} + \frac{px}{m^2}$. Da nun $\frac{pa}{m^2} < \frac{-pa}{m}$ ist, so würde y^2 eine negative Größe, folglich y etwas unmögliches seyn. Daher sind Ordinaten für Abscissen, die zwischen D und I genommen werden, unmögliche Größen, d. h. zwischen D und I hat die Hyperbel keine Ordinaten.

§. 226.

Erklärung. Die gerade Linie DI, welche die Scheitelpuncte D und I der Hyperbel NDF und nIf mit einander verbindet, heißt ihre Axe. Nimmt man DR = RI, so ist R der Mittelpunct der Hyperbel. Die mittlere Proportionallinie zwischen der Axe (a) und dem Parameter (p) der Hyperbel nennt man (wie bey der Ellipse, §. 198.) ihre kleine Axe ($\sqrt{ap}$), richtiger Nebenaxe, da $\sqrt{ap} > a$ werden kann.

§. 227.

Anmerkung. Man pflegt diese Nebenaxe aus der Mitte der Hauptaxe und in der Hyperbel-Ebene lothrecht dergestalt zu errichten, daß ihre zwey Hälften zu beyden Seiten der Axe liegen. Nur darf diese Nebenaxe hier nicht als Ordinate angesehen werden. (§. 225, 4).

§. 228.

Aufgabe. Aus beyden Axen eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Auflösung. Nennt man die Nebenaxe α, so ist (nach §. 226.) $a : \alpha = \alpha : p$, folglich $p = \frac{\alpha^2}{a}$. Wird nun dieser Werth in die Gleichung $y = px + \frac{px^2}{a}$ gebracht, so erhält man $y^2 = \frac{\alpha^2 x}{a} + \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}$, oder $y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)$ welches die verlangte Gleichung ist, woraus sich ebenfalls sämmtliche Eigenschaften der Hyperbel ableiten lassen.

§. 229.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, indem man die Abscissen aus dem Mittelpuncte rechnet.

Auflösung. Es sey mAM (Fig. 44.) und hBH die Hyperbel, AB ihre Axe, c deren Mitte, und die Abscisse CP $= n$, so ist die zeitherige Abscisse AP $= n - \frac{a}{2}$. Wird nun dieser Werth von x in die Gleichung für y^2 (§. 228.) gesetzt, so erhält man

$$y^2 = \alpha^2 + \left\{\frac{n - \frac{a}{2}}{a} + \frac{\left(n - \frac{a}{2}\right)^2}{a^2}\right\}, \text{ oder}$$

$$y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{n}{a} - \frac{1}{2} + \frac{n^2}{a^2} - \frac{an}{a^2} + \frac{a^2}{4a^2}\right), \text{ daher}$$

$$y^2 = \alpha^2 + \left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\alpha^2 n^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Auch aus dieser Gleichung lassen sich sämmtliche Eigenschaften der Hyperbel entwickeln.

§. 230.

Aufgabe. Zu bestimmen, in welchem Verhältnisse die Ordinaten der Hyperbel stehen.

Auflösung. Es seyen (Fig. 44.) AP und AR zwey willkührliche Abscissen, und $PM = y$, $RS = Z$ die ihnen zukommenden Ordinaten so ist (nach §. 224).

$$y^2 : z^2 = p \times AP + \frac{p \times AP^2}{BA} : p \times AR + \frac{p \times AR^2}{BA};$$ folglich $y^2 : z^2 = AP \times BA + AP \times AP : AR \times BA + AR \times AR$, d. h.

$$y^2 : z^2 = AP \times (BA + AP) : AR \times (BA + AR),$$

oder $y^2 : z^2 = AP \times BP : AR \times BR$;

daher verhalten sich in der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus denen ihnen zugehörigen Abscissen und den Summen aus diesen Abscissen und der Hauptaxe.

§. 231.

Aufgabe. Eine Hyperbel vermittelst des Kreises zu construiren.

Auflösung. Wenn BV (Fig. 45.) die Abscissenlinie der zu findenden Hyperbel, und B ihr Scheitelpunct ist, so nehme man BA auf der verlängerten VB als Hauptaxe an. Sind nun BP und BR zwey willkührliche Abscissen, und man macht $PB^1 = BP$, $RR' = BR$, beschreibet sodann über AB', AR' Halbkreise, errichtet aus P, R die Lothe PM, RS, so befinden sich die Puncte M, S in der Hyperbel, denn es ist $PM^2 = AP \times PB^1$, und $RS^2 = AR \times RR^1$, folglich wird auch

$PM^2 : RS^2 = AP \times PB^1 : AR \times RR^1$, oder

$PM^2 : RS^2 = AP \times BP : AR \times BR$; daher liegen

M und S in einer Hyperbel (§. 230). Auf gleiche Weise bestimmt man alle übrige Ordinaten für die ihnen zugehörigen Abscissen.

§. 232.

Aufgabe. Einen Punct in der Abscissenlinie zu bestimmen, der die Lage hat, daß die daselbst errichtete Ordinate dem halben Parameter gleich ist.

Auflösung. Weil $y = \frac{p}{2}$ seyn soll, so ist hier $y^2 = \frac{p^2}{4}$. Allein $p = \frac{\alpha^2}{a}$ (§. 228.), folglich $y^2 = \frac{\alpha^4}{4a^2}$. Es wird daher (nach §. 229.) $\frac{\alpha^4}{4a^2} = \frac{\alpha^2 n^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$, worin nun der Werth der Abscisse n zu bestimmen ist. Dies giebt $\frac{\alpha^2}{4a^2} = \frac{n^2}{a^2} - \frac{1}{4}$, oder $\frac{\alpha^2}{4a^2} + \frac{1}{4} = \frac{n^2}{a^2}$, d. h. $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{a^2}{4} = n^2$, woraus $n = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + a^2}{4}\right)} = \pm \frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)}}{2}$. Daher giebt es zwey Puncte auf entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstande von der Mitte C (Fig. 46.), welche die verlangte Eigenschaft haben. Da $\alpha^2 + a^2 > a^2$, folglich $\sqrt{(\alpha^2 + a^2)} > a$, und $\frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)}}{2} > \frac{a}{2}$, d. h. $n > CA = CB$ ist, so müssen sie offenbar in den Abscissenlinien AH und Bh liegen, und man stelle dieselbe durch F und f dar.

§. 233.

Erklärung. Diese hier gefundene Puncte heissen auch bey der Hyperbel die Brennpuncte aus ähnlichen Ursachen wie oben bey der Parabel (§. 193.) und Ellipse (§. 217.).

§. 234.

Zusatz. Die Entfernung des Brennpunctes F vom Scheitel A ist CF — CA; oder $\frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)} - a}{2}$.

§. 235.

Anmerkung. Wäre DE (Fig. 46.) die Nebenaxe der Hyperbel (§. 226.) und man denket sich die gerade AD, so ist $AD = \sqrt{(CA^2 + CD^2)} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)}}{2} = n = CF$ (§. 232). Wenn also der Hyperbel beyde Axen gegeben sind, so kann man daraus sehr leicht die Entfernung des Brennpunctes von der Mitte, oder CF, construiren. Eben so läßt sich sehr leicht die halbe Nebenaxe (CD) finden, wenn man die halbe Hauptaxe (CA) und die Entfernung des Brennpunctes von der Mitte (CF) kennet. Beydes dienet auch sehr wohl bey practischen Verzeichnungen.

§. 236.

Aufgabe. Den Unterschied zweyer geraden Linien zu finden, welche aus den Brennpuncten der Hyperbel nach einem beliebigen Orte in ihr gezogen werden.

Auflösung. I. Wenn der in der Hyperbel genommene Punct S (Fig. 46.) eine solche Lage hat, daß derselbe lothrecht über dem Brennpuncte F lieget. Hier soll man fs — FS bestimmen.

Da $CF^2 = \frac{\alpha^2 + a^2}{4}$ ist (§. 232.), so wird $fF^2 =$

$\alpha^2 + a^2$. Auch hat man $FS^2 = \frac{\alpha^4}{4a^2}$ (§. 232.) daher ist $fS^2 = \frac{\alpha^4}{4a^2} + \alpha^2 + a^2 = \frac{\alpha^4 + 4\alpha^2 a^2 + 4a^4}{4a^2}$, folglich $fS = \frac{\alpha^2 + 2a^2}{2a}$, und da $FS = \frac{\alpha^2}{2a}$, so wird $fS - FS = \frac{\alpha^2 + 2a^2 - \alpha^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a = AB$; folglich ist hier der Unterschied der Linien fS und FS der Hauptaxe gleich.

II. Wenn der Punct M eine solche Lage hat, daß ein Loth MP auf die über F verlängerte af fällt, so ist nun $FP^2 = (CP - CF)^2$. Setzt man nun $CP = v$, so wird $FP = CP - CF = v - \sqrt{\frac{(\alpha^2 + a^2)}{2}}$ (§. 232.) folglich $FP^2 = v^2 - v \times \sqrt{(\alpha^2 + a^2)} + \frac{\alpha^2 + a^2}{4}$. Da nun $PM^2 = \frac{\alpha^2 v^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$ (§. 229.), so wird $FM^2 = v^2 - v \times \sqrt{(\alpha^2 + a^2)} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{\alpha^2 v^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$, oder $FM^2 = \frac{a^2 v^2 + \alpha^2 v^2}{a^2} - v \times \sqrt{(\alpha^2 + a^2)} + \frac{a^2}{4}$, oder $FM^2 = (a^2 + \alpha^2)\frac{v^2}{a^2} - v \times \sqrt{(\alpha^2 + a^2)} + \frac{a^2}{4}$, oder indem man beyderseits die Quadratwurzel auszieht, $FM = \frac{v}{a} \times \sqrt{(a^2 + \alpha^2)} - \frac{a}{2}$.

III. Ferner ist $fP = fC + CP = CF + CP =$

$v + \frac{\sqrt{(\alpha^2 + a^2)}}{2}$ (II); folglich $fP^2 = v^2 + v \times \sqrt{(\alpha^2 + a^2)} + \frac{\alpha^2 + a^2}{4}$. Da nun wieder $PM^2 = \frac{\alpha^2 v^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$, so wird nunmehr $fM^2 = v^2 + v \times \sqrt{(\alpha^2+a^2)} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{\alpha^2 v^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$, und, nach ähnlicher Rechnung wie vorhin (in II), erhält man $fM = \frac{v}{a} \times \sqrt{(a^2 + \alpha^2)} + \frac{a}{2}$.

IV. Daher wird (aus II. u. III.) $fM - FM = \frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = a = AB$. Wenn das Loth MP zwischen F und A fällt, so ist der Beweis dem eben geführten ganz ähnlich. Daher wird er hier übergangen, und: **der Unterschied jeder zwey aus den Brennpuncten der Hyperbel nach einem beliebigen Orte ihres Umfanges gezogenen geraden Linien ist ihrer Hauptaxe gleich.**

§. 237.

Erklärung. Jede gerade Linie aus dem Brennpuncte der Hyperbel nach einem beliebigen Puncte ihres Umfanges (wie fM, FM) heißt der **Leitfaden, beschreibende Radius, Radiusvector** der Hyperbel. Die Ursache dieser Benennung wird sich sogleich wieder zeigen.

§. 238.

Aufgabe. Aus der gegebenen Hauptaxe der Hyperbel und ihren Brennpuncten diese Curve zu construiren.

Auflösung. Es sey AB (*Fig.* 47.) die Hauptaxe, und in ihrer beiderseitigen Verlängerung seyen f und F die Brennpuncte der zu construirenden Hyperbel, so beschreibe man aus f mit Linien wie fM, fM′, fM″, . . . die allmählig größer als fA $=$ FB werden, die bemerkten Kreisbogen, welche sodann aus F durch andere Bogen geschnitten werden, deren Radien fM — AB, fM′ — AB, fM″ — AB, . . sind. Alle diese Durchschnittspuncte M, M′, M″, . . . befinden sich in einer Hyperbel (§. 236). Auf gleiche Weise werden die Puncte m, m', m'', . . . bestimmt, und auf ähnliche Art aus F die Puncte N, N′, N″ . . . und n, n', n'', . . . der zu DAC gehörigen Hyperbel EBG.

§. 239.

Aufgabe. Eine Hyperbel vermittelst mechanischer Construction zu beschreiben.

Auflösung. I. Man nehme auf einer geraden Linie xy (*Fig.* 48.) von unbestimmter Länge die Hauptaxe $= AB$, die Brennweite $= AF = Bf$.

II. Um f sey ein Lineal fC beweglich, und in F und C ein Faden befestiget, dessen Länge $= f$C — AB.

III. Wird nun dieser Faden mit einem zugespitzten Bleystifte an das Lineal angedrückt, und letzteres dabey fortbeweget, so beschreibet diese Spitze eine Hyperbel. Denn es ist FM $+$ MC $=$ fM $+$ MC — AB; folglich FM $=$ fM — AB, und daher fM — FM $=$ AB, und M in der Hyperbel. (§. 236).

§. 240.

Aufgabe. An jeden gegebenen Punct der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Wenn M (*Fig.* 46.) der gegebene Punct

der Hyperbel ist, so ziehe man die beschreibende Radien fM und FM, halbire den $< fMF$, welchen sie an M bilden, durch die gerade MT, so ist TMR eine Tangente. Denn hätte diese Linie noch einen andern Punct, z. B. R mit der Hyperbel gemein, so wäre, wenn man fR und FR zieht, $fR - FR = fM - FM$. Nun ist aber, wenn $MG = MF$ gemacht, und RG gezogen wird, $fG = fM - FM$; folglich wäre auch $fR - FR = fG$. Da aber auch $FR = GR$ ist, so wäre ferner $fR - GR = fG$, folglich auch $fR = fG + GR$. Da Letzteres aber widersprechend ist, so ist M der einzige Berührungspunct der geraden RMT und der Hyperbel.

§. 241.

Zusatz. Da $< GMT = < FMT$ und $< GMT = < RMK$, so ist auch $< FMT = < RMK$; d. h. wenn zwey beschreibende Radien nach einem willkührlichen Puncte der Hyperbel gezogen werden; so bildet der größere in seiner Verlängerung mit der an diesen Punct gezogenen Tangente eben den Winkel, welchen der kleinere damit macht.

§. 242.

Anmerkung. Wenn LMASV einen hyperbolischen Hohlspiegel und KM einen Lichtstrahl bedeutet, der gegen den Brennpunct f gerichtet ist; so wird derselbe durch die Reflexion in M nach F gelangen. Daher werden sich alle Lichtstrahlen, welche nach f gerichtet sind, in dem Puncte F sammeln, welcher daher den Namen eines Brennpunctes verdienet.

§. 243.

Aufgabe. Es sey mAM (Fig. 49.) eine gegebene

Hyperbel, A ihr Scheitel, AB ihre Hauptaxe, C ihre Mitte, BAV deren beliebige Verlängerung. Nun setze man in A die Nebenaxe ED so lothrecht auf BA, daß EA = DA, und ziehe durch durch C und E, und C und D die geraden unbegrenzten Linien CEr und CDR, und errichte in einem beliebigen Puncte P die Lothe Pr und PR. Man soll die Unterschiede PR — PM und Pr — Pm finden.

Auflösung. Es sey AB $= a$, ED $= \alpha$, CP $= x$, PM $= y$, PR $= z$; so ist CA : AD = CP : PR, d. h. $\frac{a}{2} : \frac{\alpha}{2} = x : z$, folglich $z = \frac{\alpha x}{a}$, und $z^2 - y^2$ oder $(z + y) \times (z - y) = \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{4}$ (§. 229.) $= \frac{\alpha^2}{4}$. Daher ist $z - y =$ MR $= \frac{\alpha^2}{4(z+y)}$.

§. 244.

Zusatz. I. Da in diesem Ausdrucke für MR $= mr$ die Größe α^2 unveränderlich ist, y und z hingegen, mit der Zunahme von x, ohne Ende größer werden können, so muß MR $= mr$ ins Unendliche vermindert werden können. Aber MR $= mr$ kann niemals völlig verschwinden, wie groß auch CP je werden mag. Folglich haben die geraden Linien CR und Cr die Eigenschaft, daß sie sich in ihrer Verlängerung den verlängerten Schenkeln der Hyperbel ohne Ende mehr und mehr annähern, ohne solche einmal wirklich zu erreichen.

II. Eben dieses erhellet auch aus Folgendem. Da $\text{PR}^2 = \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}$, und $\text{PM}^2 = \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}$ ist (§. 243.), so wird hieraus $\text{PR}^2 - \text{PM}^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\text{ED}^2}{4} = \text{AD}^2$.

Da nun der Quadratenunterschied aller möglichen veränderlichen PR und PM jedesmal dem Quadrate der beständigen AD gleich ist, so kann $PR^2 - PM^2$ und folglich auch $PR - PM$, niemals $= o$ werden, d. h. kein Punct in der verlängerten CR kann je in die Hyperbel fallen. — Allein da bey immer größer werdenden x das Verhältniß $\frac{a^2x^2}{a^2} : \frac{a^2x^2}{a^2} - \frac{a^2}{4}$ dem Verhältnisse von 1 : 1 immer näher rücken muß, so werden hierbey die Puncte der Hyperbel und der geraden Linie CR sich immer mehr annähern.

III. Da $MR = PR - PM$, und $mR = PR + PM$; so wird auch $MR \times mR = PR^2 - PM^2$. Da nun auch $PR^2 - PM^2 = AD^2$ (II.), so ist $MR \times mR = AD^2$, folglich $MR : AD = AD : mR$.

§. 245.

Erklärung. Diese der Lage nach so eben bestimmten geraden Linien heißen die Asymtoten der Hyperbel, so wie man überhaupt jede Grenze mit diesem Namen bezeichnet, welcher sich eine Größe (sie sey stetig oder unstetig) ohne Ende nähern kann, ohne sie jemals wirklich zu erreichen. So ist z. B. in der unendlichen Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ die Asymptote $= 1$.

§. 246.

Aufgabe. Aus dem Scheitelpuncte A (Fig. 49.) sey die gerade AI mit der Asymtote Cr gleichlaufend gezogen. Man soll die Größe dieser AI finden.

Auflösung. I. Da $AI \# EC$, so ist $DA : DE = AI : EC$, also $AI = \frac{1}{2} EC$; aber $EC = CD$, folglich $AI = \frac{1}{2} CD$. Da nun auch wegen $DA : AE =$

$DI : IC$, die $CI = \frac{1}{2} CD$ ist, so hat man $AI = CI$. Auch ist $AI = ID$.

II. Ferner ist $CD^2 = CA^2 + AD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{a^2 + \alpha^2}{4}$, folglich $CI^2 = AI^2 = \frac{a^2 + \alpha^2}{16}$.

§. 247.

Erklärung. Das Quadrat dieser Linien $CI = AI$ heißt die Potenz der Hyperbel. Sie ist daher jedesmal dem sechzehnten Theile der Quadratensumme beyder Axen gleich. (§. 246).

§. 248.

Aufgabe. Wenn man durch M (*Fig.* 49.) die MQ $\#$ AI ziehet, so soll das Verhältniß von $MQ \times QC : AI^2$ gefunden werden.

Auflösung. Da $\triangle\ MQR \backsim \triangle\ AID$, so ist $MR : MQ = AD : AI$, folglich $AI = \frac{MQ \times AD}{MR} = ID$ (§. 246, *I.*). Ferner ist (nach §. 244, *III*) $MR : AD = AD : mR$, daher $mR = \frac{AD^2}{MR}$. Endlich hat man $AD : DI = qQ : QC$, oder
$AD : DI = mR : QC$, d. h.
$AD : \frac{MQ \times AD}{MR} = \frac{AD^2}{MR} : QC$, folglich $QC = \frac{MQ \times AD^2}{MR^2}$ und $QC \times MQ = \frac{MQ^2 \times AD^2}{MR^2}$. Allein da $\frac{MQ^2 \times AD^2}{MR^2} = AI^2$, so ist auch $MQ \times QC = AI^2$.

§. 249.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zwischen den Asymptoten zu finden.

Auflösung. Setzt man $CQ = x$, $QM = y$, und $CI = AI = p$; so wird $xy = p^2$ die verlangte Gleichung seyn (§. 348.). Da nun auch $p^2 = \frac{a^2 + \alpha^2}{16}$ (§. 346.), so läßt sich diese Gleichung auch folgendergestalt ausdrücken: $xy = \frac{a^2 + \alpha^2}{16}$.

§. 250.

Aufgabe. Aus den gegebenen Asymtoten und der Potenz der Hyperbel diese Curve zu construiren.

Auflösung. Es seyen BA (*Fig.* 50.) und AC die Asymptoten, DE^2 die Potenz der zu construirenden Hyperbel, so ziehe mau durch E die FEG gleichlaufend mit AC, so wie auch die aus dem willkührlichen Puncte P gezogene PN parallel mit AB. Wird nun die gerade AN, und durch den Durchschnittspunct H die HM parallel mit AC geleget, so befindet sich der Punct M in der Hyperbel. Denn da $\triangle APN \backsim \triangle ADH$, so ist
$AP : PN = AD : DH$, allein es ist $PN = DE$, auch $AD = ED$ (§. 246, *I.*) und $DH = PM$, folglich wird $AP : DE = DE : PM$, und $AP \times PM = DE^2$. Daher liegt M in der zu bestimmenden Hyperbel (§. 349). Auf gleiche Weise lassen sich mehrere Puncte bestimmen.

§. 251.

Erklärung. Wenn in einer Hyperbel die Hauptaxe

der Nebenaxe gleich ist, so heißt sie eine gleichseitige. Es sey (*Fig.* 49.) $AB = DE$, so wird man (nach §. 243) die Hyperbel $ZMAmK$ construiren können, welche eine gleichseitige ist.

§. 252.

Zusatz. *I.* In der gleichseitigen Hyperbel ist der Parameter den beyden Axen gleich (§. 224, 4 u. §. 226).

II. Wenn man in die Gleichung für die Hyperbel überhaupt: $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (nach §. 251.) $p = a$ setzt, so wird $y^2 = px + x^2$ die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel seyn.

III. Hieraus folget $y^2 = (p + x) \times x$, daher $p + x : y = y : x$. Wenn man also, für einen beliebigen Parameter p und willkührliche Abscissen x, zwischen $p + x$ und x mittlere Proportionallinien suchet, indem über $p + 2x$ Halbkreise beschrieben, und am Ende von $p + x$ Lothe errichtet werden bis zur Peripherie, so sind diese zu den Abscissen x gehörigen y für die gleichseitige Hyperbel, welche hierdurch, bey gegebenem Parameter, leicht construirt werden kann.

IV. Weil $AB = DE$, so ist hier auch $AC = AD = AE$, folglich der Asymptotenwinkel DCE in der gleichseitigen Hyperbel $= R$.

IV. Allgemeine Bemerkungen über die Kegelschnitte.

§. 253.

Etwas zu der Geschichte der Kegelschnitte:

So wie man dem Plato (400 J. v. Ch.) die erste Anwendung der Analysis auf die Geometrie zuzuschreiben pfleget, so wird dieser alte Weise auch meist für den ersten Erfinder der Kegelschnitte gehalten. Doch ist es wahrscheinlich, daß er die geometrische Analysis blos im Allgemeinen vorgetragen, und die Parabel, Ellipse und Hyperbel nur in so fern gekannt habe, als sich diese Curven aus dem Durchschnitte des Kegels ergeben, ohne tiefere Sätze aus ihnen abzuleiten. Den eigentlichen Grund zur ausführlichen Bearbeitung der Kegelschnitte scheint Menächmus, ein Zögling des Plato, gelegt zu haben. Der erste, welcher über diese Curven geschrieben hat, war Aristäus der ältere, ebenfalls ein Zögling vom Plato. Sein Werk, welches aus fünf Büchern bestand, führte späterhin Pappus aus Alexandrien (um d. J. 375 n. Ch.) in seiner uns hinterlassenen schätzbaren Sammlung von mathematischen Methoden, Sätzen und Auflösungen an, ohne welche wir von vielen verlornen Schriften der alten Geometer nicht einmal die Titel kennen gelernt hätten.

Auch Euclides (300 J. v. Ch.) hatte ein Werk in vier Büchern über die Kegelschnitte geschrieben, welches aber, so wie dessen Hauptschrift, die Porismen in drey Büchern, nicht zu uns gekommen ist. Der berühmte Archimedes (250 J. v. Ch.) scheinet nichts Schriftliches über diese Curven hinterlassen zu haben.

Das wichtigste und ächtclassische Werk über die Kegelschnitte verdanket die Nachwelt dem Apollonius von Pergä (200 J. v. Ch.), welchen die Alten mit dem Ehrentitel des gro-

ßen Geometers belegten. Seine Schrift bestehet aus acht Büchern. Die vier ersten besitzen wir noch im Urtexte, die drey folgenden sind aus einer arabischen Uebersetzung ins Lateinische übertragen, das achte aber von Halley, nach einer kurzen Anzeige, welche Apollonius selbst davon giebt, wieder hergestellt worden:

Apollonii Pergaei Conica cum *Pappi* Lemmatis ac *Eutocii* Commentario, et *Sereni Antisensis* de sectione cylindri et coni. Lib. II. ex edit. Halleii. Oxoniae 1710. Fol.

Der hier genannte Eutocius aus Ascalon (5 J. n. Ch.) hat nämlich sehr nützliche Erläuterungen über die vier ersten Bücher des Apollonius geschrieben, so wie auch Serenus aus Antissa auf Lesbos (ungewissen Zeitalters) eine Abhandlung über Cylinder- und Kegelschnitte.

In den vier ersten Büchern erscheinet Apollonius weniger als Erfinder, sondern trägt meist dasjenige in besserer Form vor, was schon früher Euclides in dieser Lehre zusammengestellt hatte. Allein die vier letzten Bücher sind reich an originellen und tiefsinnigen Untersuchungen. Man sehe Klügel's mathematisches Wörterb. II. B. Art. Geometrie.

§. 254.

Ursprung der Worte: Parabel, Ellipse, Hyperbel.

Die Natur der bisher betrachteten drey Kegelschnitte wurde durch Gleichungen bestimmt, worin das Quadrat der Ordinate von der veränderlichen Absciße und beständigen Größen abhängig war. Bey einerley Absciße und denselbigen unveränderlichen Größen hängt daher die Krümmung der Curve lediglich von dem Quadrate der Ordinaten, und dadurch von der Ordinate

selbst, ab. Da nun in der zuerst (§. 179.) betrachteten Curve y^2 immer genau so groß ist, als px, folglich zwischen y^2 und diesem px eine genaue Ausgleichung Statt findet, so war es natürlich, dieselbe Parabel (von παραβολη, Vergleichung) zu nennen, um durch dieses Wort zugleich auf ihre eigenthümliche Natur hinzubeuten.

In der nächstfolgenden Curve (§. 195.) ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, folglich fehlet dem Quadrate der Ordinate der Werth von $\frac{px^2}{a}$, um dem Producte der beständigen Größe p in die veränderliche Abscisse x gleich zu seyn. Das Wesen dieser krummen Linie, und ihr Unterschied von der Parabel, bestehet daher in diesem Mangel. Folglich ist ihre Benennung Ellipse (von Ἐλλειψις, Mangel) sehr passend gewählet.

Die Natur der dritten Curve (§. 224.) wird durch die Gleichung $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ausgesprochen. Hier ist das Quadrat der Ordinate nicht nur dem Producte px gleich, sondern jenes Quadrat übertrifft dieses Product noch um die Größe $\frac{px^2}{a}$. Dieser Überschuß (ὑπερβολη, Überschuß) gab ihr den Namen Hyperbel.

Ältere Geometer gaben diesen drey Curven andere Benennungen. Wenn man sich einen senkrechten Kegel denket, und einen Schnitt durch seine Spitze und den Durchmesser seiner Grundfläche; so kann dieses Axendreyeck entweder rechtwinkelig, spitzwinkelig oder stumpfwinkelig seyn. Im ersten Falle ist der Kegel selbst ein rechtwinkliger, im zweyten ein spitz-, im dritten ein stumpfwinkeliger Kegel. Wird nun jeder von ihnen von einer Ebene geschnitten, welche auf dessen Seite lothrecht stehet, so wird der Schnitt im ersten

Fälle mit der andern Seite des Kegels gleichlaufend seyn, und folglich (§. 178.) eine Parabel erzeugen; im zweyten Falle muß die schneidende Ebene auch die andere Seite des Kegels durchschneiden, und somit (§. 194.) eine Ellipse bilden; im dritten wird die Durchschnittsebene in ihrer Verlängerung nach oben auch den entgegengesetzten stumpfwinkeligen Kegel durchschneiden, und hierdurch (§. 223.) die Hyperbel erzeugen. — Eine einfache Zeichnung kann diese drey Fälle erläutern.

Daher nannte man nun die Parabel den Schnitt des rechtwinkeligen, die Ellipse den Schnitt des spitzwinkeligen, und die Hyperbel den Schnitt des stumpf winkeligen Kegels. Dieses Ausdruckes bedienet sich z. B. Archimedes in seinen uns hinterlassenen Werken.

§. 255.

Vergleichung der Kegelschnitte und deren Uebergänge.

1.) Es sey MPK (Fig. 51.) ein beliebiger senkrechter Kegel und NP*R* dessen entgegengesetzter. Nimmt man in der Seite PK einen beliebigen Punct *A*, und schneidet den Kegel nach AC ⋕ KM; so ist der Kegelschnitt ein Kreis, (wie die niedere Geometrie lehret) und hier ist $y^2 = ax - x^2$ (§. 171.) für $AC = a$.

2.) Geschieht der Schnitt nach AD, so daß die verlängerte *A*D mit der über M verlängerten KM zusammentreffen würde, so entstehet eine Ellipse, worin $y^2 = \frac{\alpha^2 x}{a} - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}$ ist (§. 199.) wenn AD $= a$, und die kleine Axe $= \alpha$ gesetzt wird. Nimmt man hier die beyden Axen gleich groß an, oder $\alpha = a$, so wird $y^2 = ax - x^2$, und die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis, dessen Durchmesser $= a = AC$ ist.

3.) Aus $y^2 = \frac{\alpha^2 x}{a} - \frac{\alpha^2 x^2}{a^2}$ folget $y^2 = \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^2 x}{a}\right) \frac{x}{a}$. Die Größe der kleinen Axe α sey, was sie wolle, so wird, da jedesmal $x < a$ seyn muß, der Werth von $\frac{\alpha^2 x}{a}$, so wie auch der von $\frac{x}{a}$ um so kleiner werden, je größer a genommen wird. Nimmt man daher die Abscissen x als unveränderlich an, so werden die ihnen zugehörigen Ordinaten y um so kleiner werden, je größer man a setzt, d. h. die Ellipsen müssen bey dem allmähligen Größerwerden von a immer eccentrischer werden, d. h. sich von dem Kreise stets mehr und mehr entfernen. Folglich geben die Schnitte nach AE, nach AF, ... immer mehr und mehr eccentrische Ellipsen, da ihre großen Axen AE, AF, ... ohne Ende zunehmen können.

4.) Setzt man (in 3.) anstatt $\frac{\alpha^2}{a}$ den Parameter p (nach §. 198.), so wird $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$. Nimmt nun die Größe a ins Unendliche zu, indem die Durchschnittsebene in ihrer Verlängerung die verlängerte Seite des Kegels immer entfernter von P trifft; so wird der Werth von $\frac{p}{a}$ ins Unendliche abnehmen, d. h. sich dem eigentlichen o ohne Ende annähern. Geschieht der Schnitt nach AG ⧺ PM, so kann man die Axe a als unendlich groß annehmen, folglich wird jetzt $\frac{p}{a} = o$, und daher auch $\frac{p}{a} \times x^2 = o$, und aus der Gleichung für die Ellipse wird nun $y^2 = px$, d. h. jene für die Parabel. (§. 179).

5.) Drehet sich die schneidende Ebene noch mehr nach AH, so wird sie in ihrer Verlängerung nach Ah auch den Kegel

NPR in mh schneiden, wodurch sich eine Hyperbel bildet, deren Axe Am nunmehr wieder begrenzt wird, und eine negative Lage in Bezug auf die frühern Axen der Ellipsen hat. Daher unterscheidet sich auch die Gleichung für die Hyperbel nur in den Zeichen von jener für die Ellipse, und ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 224.), weil $\frac{-px^2}{-a} = + \frac{px^2}{a}$ giebt.

6.) Bey fernerm Umdrehen der Ebene nach AI entstehet eine andere Hyperbel, deren Axe An, und Abscissenlinie AI und ni ist. Wenn der Durchschnittspunct I näher nach K rückt, so kommen jedesmal andere Hyperbeln von kleinern Asymptotenwinkeln zum Vorscheine.

7.) Fällt I in K, so hat nach KAPN keine Curve Statt. Allein für Durchschnitte nach AL, AQ, . . . welche in ihrer Verlängerung über A, die über K verlängerte MK schneiden würden, entspringen wieder Ellipsen, deren Axen Al und Aq sind, und welche sich allmählig wieder dem Kreise durch AC nähern.

§. 256.

Allgemeine Gleichung für die drey Kegelschnitte.

Aus dem Bisherigen folget, daß bey rechtwinkeligen Coordinaten, die Abscissen auf der Axe vom Scheitelpuncte an gerechnet, die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte folgende sey.

$$y^2 = px \pm \frac{p}{a} x^2.$$

Setzt man das Zeichen +, so gilt sie für die Hyperbel; nimmt man −, so paßt sie für die Ellipse; und wenn $a = \infty$, d. h. unendlichgroß gesetzt wird, so erhält man die Gleichung für die Parabel.

§. 257.

Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte.

Aus obiger Betrachtung (in §. 255.) ist es auch einleuchtend, daß es, so wie nur einen Kreis, auch nur eine Parabel gebe; denn (*Fig.* 51.) durch A giebt es nur eine $AC \# KM$, und nur eine $AG \# PM$. Ellipsen und Hyperbeln aber giebt es unzählig viele, da unendlich viele Durchschnitte wie AD, AE, AF, ... und AH, AI, ... denkbar sind.

§. 258.

Ordinaten der Kegelschnitte für einerley x und p.

1.) Es sey die Ordinate der Ellipse $= e$, jene der Parabel $= \pi$, und der Hyperbel $= h$, so ist

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= px - \frac{px^2}{a}, \\ \pi^2 &= px, \text{ und} \\ h^2 &= px + \frac{px^2}{a}, \end{aligned}\right\} (\S.\ 179,\ 195,\ 224.)$$

folglich ist für einerley Abscisse x und gleichen Parameter p die Ordinate e kleiner als π, und π kleiner als h.

2.) Da auch $px - \frac{px^2}{a} + px + \frac{px^2}{a} = 2px$ ist, so hat man hier auch $e^2 + h^2 = 2\pi^2$, und ferner $\frac{e^2 + h^2}{2} = \pi^2$.

3.) Je kleiner x und je größer a (in 1.) genommen wird, um so weniger werden die Werthe von e^2, π^2 und h^2 von einander verschieden seyn, d. h. Ellipsen und Hy-

perbeln, von großen Axen sind sehr nahe bey dem Scheitelpunct nicht sehr von der Parabel verschieden, welche den Parameter mit ihnen gemeinschaftlich hat.

Dritter Abschnitt.

Einige Curven von höheren Ordnungen.

I. Die Cissoide.

§. 259.

Erklärung. In dem Kreise BEAB (Fig. 52.) sey AB der Durchmesser, und dBD eine nach beyden Seiten ins Unendliche verlängerte Tangente. Nimmt man nun die Puncte D, D′, D″, ... auf ihr willkührlich an, ziehet die geraden Linien AD, AD′, AD″, ... und macht jedesmal AM = ED, AM′ = ED′, AM″ = E″D″ . . . . so befinden sich die Puncte M, M′, M″, ... in einer Curve, welche die Cissoide des Diocles genennt wird.

§. 260.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Cissoide zu finden.

Auflösung. Man ziehe M′P lothrecht auf AB, und setze AB = a, AP = x, PM′ = y. Da △ APM′ ∽ △ ABD′, so ist A

AP : PM′ = AB : BD′, d. h.

$$x : y = a : \frac{ay}{x} = BD'.$$

ferner hat man

$AP : AM' = AB : AD'$, d. h.

$$x : AM' = a : \frac{a \times AM'}{x} = AD'.$$

Denket man sich nun die gerade Linie BE', so ist $< BE'A = R$; folglich $BD'^2 = E'D' + AD'$, und $\frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a \times E'D' \times AM'}{x}$. Allein es ist $E'D' = AM'$, und $AM'^2 = x^2 + y^2$; daher wird $\frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a(x^2+y^2)}{x}$, folglich $\frac{ay^2}{x} = x^2 + y^2$, und $ay^2 = x^3 + xy^2$, oder auch $(a - x)y^2 = x^3$, woraus dann $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ folget, welches die verlangte Gleichung ist.

§. 261.

Aufgabe. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ die vorzüglichsten Eigenschaften der Cissoide zu entwickeln.

Auflösung. 1.) Da die Abscisse x sich auf der dritten Potenz befindet, so ist die Cissoide eine Curve von der dritten Ordnung.

2.) Weil $y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}$, so entspricht jeder Abscisse AP eine positive Ordinate PM' und eine gleiche negative Pm. Daher befindet sich die Cissoide sowohl zur Rechten als zur Linken der Abscissenlinie AB in zwey congruenten Theilen. Eben dieses erhellet auch aus der Entstehung dieser Curve (in §. 259).

3.) Setzt man $x > a$, so wird $\frac{x^3}{a-x}$ eine negative,

folglich y eine unmögliche Größe. Folglich liegen alle Ordinate der Cissoide unter der lothrechten $d''BD''$, daher auch die ganze Cissoide selbst.

4.) Nimmt man die Abscisse $= - x$, so wird der Nenner des Bruches $\frac{x^3}{a-x}$ positiv, der Zähler negativ, folglich der ganze Bruch negativ, und y wieder eine unmögliche Größe. Daher fällt auch nichts von der Cissoide unter den Punct A.

5.) Für $x = o$ ist auch $y = o$; folglich ist A Scheitelpunct. Wird x allmählich größer, so nächst auch y, weil x^3 größer und $a - x$ stets kleiner wird. Die Cissoide breitet sich also zu beyden Seiten von AB immer weiter und weiter aus, und rückt immer näher und näher gegen $d''BD''$.

6.) Wächst die Abscisse x, bis $x = a$ wird; so ist $a - x = o$, und $y = \infty$. Da aber hier die Cissoide in die Linie $d''BD''$ fallen, folglich die Ordinate eine unendliche Größe seyn müßte; so nähert sich diese Curve ohne Ende der $d''BD''$, ohne sie jemals zu erreichen. Daher ist diese $d''BD''$ die Asymptote der Cissoide. Auch lehret eben dieses die Zeichnung; denn der Punct D'' rücke noch so weit von B hinweg, so muß da M''D $=$ AE'' ist und AE'', als Sehne des Kreises, immer eine angebliche Größe behält, jede Linie wie M''D'' immer noch einige Entfernung von BD'' haben.„

§. 262.

Anmerkung. Diese Curve ist von dem griechischen Geometer Diocles erfunden worden zur Auflösung des damals so berühmten Delischen Problemes. Es foderte,

die Seite eines Würfels zu finden, welcher noch einmal so groß als ein gegebener ist. Nach einer Sage soll nämlich das Orakel zu Delos befohlen haben, den Altar des Apollo, welcher aus einem vollkommenen Würfel bestand, zu verdoppeln. So leicht nun die arithmetische Auflösung davon wird, indem, wenn y die Seite des zu findenden, a jene des gegebenen Würfels heißt, $y^3 = 2a^3$, folglich $y = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$ ist; so überschreitet die geometrische Beantwortung der Frage die Grenzen der Elementar-Geometrie. Es kömmt nämlich darauf an, zwischen den Linien a und $2a$ zwey mittlere geometrische Proportionallinien zu finden, deren erste sodann die Seite des zu construirenden Würfels ist. Denn, wenn man diese erste mittlere Proportionallinie y, die zweyte z nennt; so soll $a : y : z : 2a$ seyn. Hier ist nun $az = y^2$, folglich $z = \frac{y^2}{a}$, und $z^2 = \frac{y^4}{a^2}$. Es wird aber auch $z^2 = 2ay$; folglich hat man $2ay = \frac{y^4}{a^2}$, oder $2a = \frac{y^3}{a^2}$, oder $2a^3 = y^3$, woraus $y = a\sqrt[3]{2}$ folget.

§. 263.

Aufgabe. Das Delische Problem (§. 262.) vermittelst der Cissoide aufzulösen.

Auflösung. Wenn zwischen CR und RT (Fig. 53.) zwey mittlere geometrische Proportionallinien gefunden werden sollen, so beschreibe man mit der größten RC den Kreis ADBCA, errichte durch R die AB lothrecht auf CD, und beschreibe durch A eine Cissoide AHC . . . Nun trage man die gegebene RT aus dem Mittelpuncte R auf den Halbmes-

ser RC in T, ziehe aus B durch T die BT, welche die Cissoide in H schneidet, sodann durch A und H die Sehne AH, welche verlängert die RC in L schneidet; so ist RL die erste der zu findenden zwey Proportionallinien.

Beweis. 1.) Wenn man durch H die HFM $\#$ CD ziehet, so ist $FM^2 : FA^2 = FA^2 : FH^2$. Denn $FM^2 = x(a-x)$ (§. 260.) $FA^2 = x^2$, und $x(a-x) : x^2 = x^2 : \frac{x^4}{x(a-x)} = \frac{x^3}{a-x} = FH^2$ (§. 260.). Folglich hat man auch FM : FA = FA : FH. Da nun auch BF : FM = FM : FA, so ist BF : FM = FM : FA = FA : FH, folglich $BF^3 : FM^3 = BF : FH$.

2.) Nun hat man, vermöge der Construction, FA : FH = RA : RL, oder weil RA = RC, FA : FH = RC : RL. Allein es ist (nach 1) BF : FM = FA : FH, folglich auch BF : FM = RC : RL, und $BF^3 : FM^3 = RC^3 : RL^3$. Aber es war (nach 1) $BF^3 : FM^3 = BF : FH$, folglich ist auch $RC^3 : RL^3 = BF : FH$. Allein man hat wegen der Construction BF : FH = BR : RT, folglich wird $RC^3 : RL^3 = BR : RT$; aber BR = RC, daher denn $RC^3 : RL^3 = RC : RT$. Folglich ist RL die eine der beyden zu findenden zwey mittleren Proportionallinien zwischen RC und RT. —

3.) Nennt man nun die andere mittlere Proportionallinie y, so ist: RC : RL = RL : $y = y$: RT, woraus denn y, als mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den bekannten RL und RT, durch eine leichte Construction gefunden werden kann.

4.) Setzt man nun RC = $2a$, und RT = a, so wird

(aus 2) $RL^3 = \frac{RC^3 \times RT}{RC} = \frac{8a^3 . a}{2a} = 4a^3$. Folglich ist auch (nach 3) $RL^3 : y^3 = y^3 : RT^3$, oder $4a^3 : y^3 = y^3 : a^3$, woraus denn $y = \sqrt{4a^6} = 2a^3$ und y selbst die Seite des zufindenden doppelten Würfels wird. Daher ist das Delische Problem aufgelößt.

§. 264.

Aufgabe. Die Cissoide durch stetige Bewegung zu construiren.

Auflösung. Ueber den Durchmesser AB (Fig. 54.) ist der Halbkreis BDA beschrieben. Aus dessen Mittelpunct C sey die unbegrenzte CH lothrecht errichtet. EFG sey ein rechter Winkel, dessen Schenkel FG = AB, FE hingegen von unbestimmter Länge ist. Auch sey BA in E verlängert, daß AE = C*A*, und der rechte Winkel GFE gehe mit seinem Schenkel FE immer durch diesen Punct E, wenn er sich mit seinem Endpuncte G, auf der Linie CH fortbeweget. Nimmt man nun M in der Mitte von FG, so beschreibet dieser Punct bey der Fortbewegung des rechten Winkels GFE auf CH die Cissoide ADM.

Beweis. Man ziehe MP und FQ lothrecht auf CH, und FE schneide diese in R. Hier ist $\triangle$ CRE $\backsim$ $\triangle$ FRQ $\backsim$ $\triangle$ *M*GP, folglich CE : CR = FQ : QR, oder CE + FQ : CR + QR = FQ : QR = PG : PM. Allein wegen FG = 2MG ist auch FQ = 2MP, und QP = PG; daher verwandelt sich diese Proportion in folgende: CE + 2MP : CP — PG = PG : P*M*. Nun sey AC $= a$, $CP = x$, $PM = y$, und $Pg = z$; so ist

$2a + 2y : x - z = z : y$, folglich

$2(a + y)y = (x - z)z = xz - z^2$. Da aber $z^2 = a^2 - y^2$, so wird

$$2ay + 2y^2 = xz - a^2 + y^2, \text{ oder}$$
$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ oder}$$
$$(a + y)^2 = xz, \text{ folglich}$$
$$(a + y)^4 = x^2 z^2, \text{ d. h.}$$
$$(a+y)^4 = x^2 \times (a^2 - y^2) = x^2 \times (a-y) \times (a+y),$$
daher $(a + y)^3 = x^2 \times (a - y)$.

Nimmt man nun AB für die Abscissenlinien, und A zum Anfangspuncte der Abscissen, ziehet MS lothrecht auf AB, und nennt AS $= u$; so ist AS $=$ AC $+$ CS $= AC + PM = u = a + y$, und es wird $y = u - a$; daher ist $u^3 = (a + y)^3 = x^2 \times (a - (u - a))$, d. h. $u^3 = x^2 (2a - u)$, welches die oben (§. 260.) gefundene Gleichung für die Cissoide ist.

§. 265.

Anmerkung. I. Diese sehr sinnreiche Constructions-Methode hat Newton (Arithm. univ. de aequationum constructione lineari, pag. 231.) angegeben. M. siehe Klügel's mathem. Wörterb. Art. Cissoide. S. 437. ff.

II. Reimer in s. historia duplicationis cubi, Goettingae 1798, beweiset aus einem Citate des Proclus, daß die Cissoide schon dem Geminus, der im ersten Jahrhunderte v. Chr. Geb. gelebet hat, bekannt gewesen sey. Dieser Geminus bemerket auch, daß diese Curve von dem Epheublatte (Κίσσος, Epheu) den Namen Cissoide, Epheuähnliche erhalten habe. (Klügel a. a. O. S. 436 u. 438.).

II. Die Conchoide.

§. 266.

Erklärung. Es sey XEX (Fig. 55.) eine unbegrenzte gerade Linie, und C ein ausserhalb derselben genommener willkührlicher Punct, aus welchem das Loth CEA auf XEX errichtet ist. Nimmt man nun Ea = EA nach Belieben, denket sich die Linie CA in den schiefen Lagen CM, CN, ... und macht immer Qm = QM = Sn = SN = Ea = EA; so befinden sich die Puncte a, m, n, . . . und A, M, N, . . . in der Conchoide (Muschellinie) des Nicomedes. Man nennet AMN ... die obere, amn ... die untere Conchoide, den Punct C ihren Pol, und die gerade XEX ihre Basis.

§. 267.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Conchoide zu finden.

Auflösung. Es sey Ea = EA = a, CE = b, MR = PE = x, ER = PM = y; so ist QR = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ und EQ = ER − QR = $y - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Nun ist aber CE : EQ = CP : PM, d. h.

$b : y - \sqrt{(a^2 - x^2)} = b + x : y$ folglich

$by = by + xy - (b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)}$, oder

$(b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)} = xy$, folglich

$$\frac{xy}{b + x} = \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ und}$$

$$\frac{x^2 y^2}{(b + x)^2} = a^2 - x^2 \text{, folglich}$$

$$\text{I) } y^2 = \frac{(a^2 - x^2) \times (b + x)^2}{x^2}$$

Führt man die hier angeführte Rechnung wirklich aus, und bringt die Gleichung auf o, so wird

II) $x^4 + 2\,bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)\,x^2 - 2\,a^2\,bx - a^2\,b^2 = o$.

§. 268.

Aufgabe. Aus der hier gefundenen Gleichung die Haupteigenschaften der Conchoide zu entwickeln.

Auflösung. 1.) Da sich in der Gleichung II (§. 267) die Abscisse x auf der vierten Potenz befindet, so ist die Conchoide eine Curve vom vierten Grade.

2.) Aus der Gleichung I. (in §. 267.) folget, daß zu jedem x zwey gleiche, nur der Lage nach entgegengesetzte, y gehören. Daher theilet CA die Muschellinie in zwey übereinstimmende Theile zur Rechten und zur Linken. Eben dieses erhellet auch schon aus der Construction dieser Curve (nach §. 266.)

3.) Für $x > a$ wird y eine unmögliche Größe; folglich lassen sich ausser EA keine Ordinaten mehr gedenken.

4.) Nimmt man die Werthe von x negativ, so bleiben nun die Werthe von y in obiger Gleichung (§. 267, I.) wirkliche Größen. Folglich befindet sich auch die Conchoide unterhalb der Basis. Dieses folget auch unmittelbar aus der Construction dieser Curve (in §. 266.), wo die Puncte $a, m, n, \ldots$ die Lage des diesen negativen Abscissen entsprechenden Theils der Conchoide bestimmen.

5.) Setzt man $x = o$, so wird der Werth von $y = \infty$ d. h. unendlich groß. Folglich kann die zu beyden Seiten verlängerte XEX niemals die Conchoide erreichen, und

XEX ist ihre Asymptote. Eben dieses folget auch aus der Entstehung dieser Linie (§. 366.)

§. 269.

Anmerkung. Der erste Erfinder dieser Curve war der griechische Geometer Nicomedes, der wahrscheinlich im zweyten Jahrhunderte v. Ch. Geb. gelebt hat. Er bediente sich derselben sowohl zur Auflösung des Delischen Problems, als auch zur geometrischen Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile. Die kunstreiche Auflösung jener Aufgabe erzählt (nach Pappus und Eutocius) Reimer in histor. probl. de duplic. cubi, p. 169. Seine Methode, diese Curve zur Dreytheilung des Winkels zu gebrauchen, ist aber mit dessen Schrift über die Muschellinie, verlohren gegangen.

§. 270.

Aufgabe. Die Conchoide durch stetige Bewegung zu beschreiben.

Auflösung. I. Es sey (Fig. 56.) auf der unbegrenzten XAX die QB in A senkrecht. Nimmt man nun AB = Ab, und denket sich eine solche Bewegung dieser QB, daß der Punct A immer in AX fortschreitet, während sich die QB um den fixen Punct P verschiebet; so kömmt BQ nach und nach in Lagen wie CR, DS, ET, ..., und die Puncte B und b müssen die zur Conchoide gehörigen beyden Theile BCDE . . . . und bcde . . . beschreiben. Eine gleiche Bewegung der BQ läßt sich auch zur Linken vornehmen. Daß hierdurch die Conchoide entstehe, folgt unmittelbar aus ihrer Erklärung (in §. 266.).

II. Bedeutet nun XAX ein Lineal, in dessen Mitte sich eine Rinne befindet, durch welche sich ein Stift in dem Puncte

A des zweyten Lineals frey hin und her bewegen kann; wird ferner ein Stift in P befestiget, an welchem das Lineal BQ immer anliegen muß; so werden die in B und b angebrachten Bleystifte durch das Verschieben des Lineals zur Rechten und zur Linken die verlangte Conchoide auf ein untergelegtes Papier verzeichnen.

§. 271.

Erklärung. Die bisher betrachteten krummen Linien waren von der Art, daß die Lage ihrer Puncte blos durch gerade Linien bestimmt werden konnten. Ausser diesen giebt es auch noch andere Curven, die zur Bestimmung ihrer Puncte die Rectification des Kreises erfodern, indem sie nur durch rectificirte Kreisbögen geometrisch construirt werden können. Jene heißt man algebraische oder geometrische, diese transcendente oder mechanische Linien. Von letzteren sollen nun noch einige Beyspiele folgen.

III. Die Spirallinie.

§. 272.

Erklärung. Es sey mit dem Halbmesser CA (Fig. 57.) ein Kreis AB DEFGHI beschrieben, dessen Peripherie in eine bestimmte Menge gleicher Theile (n, hier in 8) abgetheilt ist. Theilt man nun CA in eben so viele gleiche Stücke (hier in 8) und nimmt $C\alpha = \frac{1}{n} CA$, $Cb = \frac{2}{n} CA$, $Cc = \frac{3}{n} CA$, , ...; so befinden sich die Puncte a, b, c, d, e, f, g in einer Curve, welche man die Spirallinie (Schneckenlinie) nennt.

§. 273.

Zusatz. Denkt man sich nun wieder neue Kreise mit den Halbmessern 2CA, 3CA, 4CA, . . . aus C beschrieben, und die vorige Construction fortgesetzt, so ist klar, daß man diese Spirallinie ins Unendliche verlängern kann.

§. 274.

Anmerkung. Man kann die Entstehung dieser Curve dadurch erläutern, daß man sich vorstellt, der Halbmesser CA drehe sich gleichförmig um C im Kreise herum und in derselbigen Zeit rücke C auf dem bewegten Halbmesser in gleichförmiger Bewegung nach A. Wenn sonach der Punct A z. B. $\frac{1}{n}$ der ganzen Peripherie zurückgelegt hat, so ist C auf dem bewegten Radius um $\frac{1}{n}$ CA fortgeschritten. Nennt man daher die Peripherie p, den Radius r, so ist immer ein $\frac{1}{n}\, p : p = \frac{1}{n}\, r : r$.

§. 275.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Spirallinie zu finden.

Auflösung. Wenn der Punct A (Fig. 58.) des Halbmessers CA mit gleichförmiger Bewegung die Peripherie APQRA beschreibet, und der Punct C rückt nach gleichem Verhältnisse in derselben Zeit von C nach A, so beschreibet C die Spirallinie CMSNA (§. 274.). Setzt man nun hier den Bogen AP (als Abscisse) $= x$, CM aber (als Ordinate) $= y$, ferner die ganze Peripherie $= p$, den Halbmesser $= r$, so ist (§. 274.) immer $p : x = r : y$, folglich $y = \frac{rx}{p}$ die Gleichung für die Spirallinie.

§. 276.

Aufgabe. Aus der Gleichung $y = \frac{rx}{p}$ die Eigenschaften der Schneckenlinie zu erklären.

Auflösung. 1.) Da die Werthe von y, ausser den Linien r und p, von den Kreisbögen x abhängig sind, und folglich die Rectification derselben voraussetzen; so ist die Spirallinie eine transcendente Linie (§. 271.).

2.) Für $x = o$, ist auch $y = o$. Denn so lange sich A nicht gegen P beweget, schreitet auch C noch nicht gegen A fort.

3.) Wenn x größer wird, so nimmt auch y zu. Auch dieses lehret die Zeichnung, und folget aus der Entstehung dieser Curve (§. 272.).

4.) So lange $x < p$ ist, muß auch $y < r$ seyn, weil man $p : x = r : y$ hat. Für $x < p$ muß also die Spirallinie innerhalb des Kreises um $2r$ liegen. Wird nun $x = p$, so wird $y = r$, und ein Punct der Curve fällt in die Peripherie. Beydes wird durch die Zeichnung erläutert.

5.) Für $x = 2p$ wird $y = 2r$, und überhaupt für $x = np$ ist $y = nr$. Wenn also x ins Unendliche wächst, so wird auch y unendlich groß. Dies erörtert die Zeichnung. Denn wenn A einen Umlauf vollendet, und dabey der Punct C die Curve CMSNA beschrieben hat, und A beginnt einen zweyten Umlauf, indeß C auf der verlängerten CA von A nach α verhältnißmäßig fortschreitet; so entstehet die Fortsetzung der Spirallinie AHKGα, und es ist klar, daß jene Umdrehungen und diese Fortsetzungen ins Unendliche gehen.

6.) Für eine Abscisse $p + x$ wird $y' = \frac{r(p + x)}{p}$ $= \frac{rp + rx}{p}$. Da nun für die Abscisse x der Werth für $y = \frac{rx}{p}$ ist, so hat man $y' - y = \frac{rp + rx - rx}{r} = r$. d. h. wenn man aus C die gerade CH ziehet, so ist CH — CM = MH = CA; oder die zusammengehörigen Puncte H und M in der Spirallinie sind um die Größe des Halbmessers CA von einander entfernt. Daß aber alle Windungen dieser Curve in allen Puncten, wie S und K, V und W, N und G u. s. f., welche durch die willkührlich gezogenen Linien CK, CW und CG bestimmt werden, gleichen Abstand = r von einander haben, läßt sich so zeigen. Es seyen die Abscissen = $np + x$ und $(n + r) p + x$, die ihnen zugehörigen Ordinaten y und y'; so ist $y' = \frac{rnp + rp + rx}{p}$ und $y = \frac{rnp + rx}{p}$; folglich immer $y' - y = r$. Man kann daher diesen spiralförmigen Windungen Parallelismus zuschreiben.

§. 277.

Anmerkung. Der erste Bearbeiter dieser Linie, welche Conon erdacht hat, ist Archimedes gewesen, welcher 250 Jahre v. Chr. Geb. gelebt hat, und zu den größten Mathematikern älterer und neuerer Zeiten zu rechnen ist. Daher wird sie auch die archimedische Spirallinie genannt. Er handelt sehr scharfsinnig von ihr in einem Buche seiner uns hinterlassenen Werke.

IV. Die Cycloide.

§. 278.

Erklärung. Es sey AB (Fig. 59) eine gerade Linie von unbegrenzter Größe. Ein Kreis von beliebigem Halbmesser AC berühre diese gerade Linie in A. Denkt man nun, dieser Kreis rolle dergestalt von A gegen B, daß die Puncte seiner Peripherie O, D, G, A nach und nach in die Puncte V, T, E und R fallen; so beschreibet der Punct A eine Curve APFQR, welche die Cycloide oder Radlinie heißt, weil sie ein jeder Punct an der Oberfläche eines auf der Ebene fortrollenden Rades erzeuget. Den Kreis um CA nennt man den erzeugenden Kreis, den Punct A den beschreibenden Punct, den Punct F den Scheitel, und die gerade AR die Grundlinie. Aus dieser Entstehung der Radlinie folget, daß der Umfang des erzeugenden Kreises der Grundlinie gleich ist. — Wenn sich der beschreibende Kreis nicht auf gerader Linie, sondern über den Umfang eines andern Kreises fortwälzet, so beschreibet der anfängliche Berührungspunct beyder Kreise eine Epicycloide, welche die obere heißt, wenn der erzeugende Kreis sich über die convexe Seite des andern; die untere hingegen wenn er sich über dessen concave Seite fortbeweget. Von beyden kann man sich leicht eine bildliche Darstellung machen.

§. 279.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Cycloide zu finden.

Auflösung. Es sey (Fig. 60.) ABD eine halbe Cycloide, welche durch Umrollen des Kreises MDKG entstand, indem der beschreibende Punct (§. 278.) D sich in A befand. Hier ist also AG = DMG, und wenn der beschreibende

Kreis von A nach E gekommen ist, so wird auch AE = Bog. BE, und folglich EG = Bog. BG. Auf die in E und G lothrecht stehenden Durchmesser EC und GD ziehe man die BNMH lothrecht; so ist Bog. BC = Bog. MD, und Bog. BE = Bog. MG. Da nun auch NE = HG, und Sehne BE = Sehne MG; so ist BN = MH, und folglich BM = NH. Aber NH = EG; mithin auch BM = EG. Allein es war vorhin EG = Bog. MD, folglich ist auch BM = Bog. MD.

Auf gleiche Weise kann erwiesen werden, daß FL (ein Theil der auf DG lothrecht stehenden FR) = Bog. LD.

Nimmt man daher den Halbkreis DLG zur Abscissenlinie an, so gehört zur Abscisse DM die Ordinate MB, zur Abscisse DL die Ordinate LF u. s. f. Da nun jede dieser Abscissen der ihr zugehörigen Ordinate gleich ist, so muß $x = y$ die Gleichung für die Cycloide seyn.

§. 280.

Aufgabe. Aus der Gleichung für die Radlinie, $y = x$, ihre Natur zu bestimmen.

Auflösung. I. Da die Werthe von y den Werthen von x jedesmal gleich sind, jedes x aber einen Kreisbogen bedeutet, der in der Ordinate y rectificirt seyn müßte; so setzt diese Curve die Rectification des Kreises voraus, und ist daher eine transcendente und keine algebraische Linie (§. 271.).

2.) Da sich der erzeugende Kreis auf der Grundlinie unzähligemal herumdrehen kann, so entstehen hierdurch unzählige Theile dieser Curve, und die Radlinie bestehet aus unendlich vielen congruenten Stücken.

§. 281.

Anmerkung. Diese Curve, von welcher hier nur der erste Begriff gegeben werden konnte, ist eine der wichtigsten unter allen. Ihre geometrische und mechanische Eigenschaften, nebst den mannigfaltigen Anwendungen davon, räumen ihr diese Stelle ein. Über ihre Erfindung ist ein noch nicht aufgehelltes Dunkel verbreitet. Aber so viel weiß man gewiß, daß der berühmte Galilei (geb. 1564 gest. 1642) der erste gewesen, welcher sie geometrisch betrachtet hat, obgleich er in seinen Untersuchungen noch nicht so glücklich war, ihren Inhalt zu bestimmen.

Dritte Abtheilung.

Erste Elemente der Infinitesimalrechnung.

Erster Abschnitt.

Grundlehren der Differentialrechnung.

I. Einleitung.

§. 282.

Erklärung. Eine Größe heißt endlich, wenn sie in bestimmten Grenzen enthalten ist; z. B. eine Linie zwischen gegebenen Endpuncten, ein Kreis oder eine Kugel von bekanntem Durchmesser; die Zahlen 8, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{12}$ u. s. f. Eine Größe wächst ohne Ende, wenn sie immer größer und größer werden kann; so, daß diesem Größerwerden niemals eine nothwendige Grenze gesetzt ist; z. B. eine gerade Linie, welche man sich zu beyden Seiten ohne Aufhören verlängert denken, eine Zahl, welche durch Vermehrung ihrer Einheiten ohne Unterlaß vermehrt werden kann. Im entgegengesetzten Falle nimmt eine Größe ohne Ende ab; gerade Linien, welche man sich immer kleiner und kleiner werdend; Brüche, welche man sich durch Vergrößerung ihrer Nenner

ohne Unterlaß verkleinert vorstellen kann, geben Beyspiele davon.

§. 283.

Erklärung. Sowohl bey einem Wachsthum, als auch bey einer Verminderung ohne Ende (§. 282) treten folgende zwey Hauptfälle ein. Entweder wird bey dieser unendlich fortgehenden Zu- oder Abnahme dennoch eine gewisse bestimmte Grenze nicht erreichet, oder es wird jede solche Grenze nothwendigerweise einmal überschritten. Wenn z. B. eine gerade Linie $= 1$, in ihrer Richtung, nach dem Gesetze $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ .... ins Unendliche zu- oder abnimmt, so wird sie im ersten Falle nie $= 2$, im andern nie $= 0$ werden. Eben dieses gilt arithmetisch von der Zahl
$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots)$ oder
$1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots)$, wo jene Summe niemal $= 2$, dieser Unterschied niemals $= 0$ werden kann. Nimmt man aber irgend eine gerade Linie von beliebiger Größe an, und läßt sie in ihrer Verlängerung um das Doppelte, Dreyfache, Vierfache, u. s. f. ins Unendliche wachsen, so muß sie einmal größer werden, als irgend eine angegebene gerade Linie, so groß diese auch seyn mag. Denket man sich umgekehrt von einer bestimmt gegebenen geraden Linie die Hälfte, das Viertheil, Achttheil, Sechzehntheil u. s. f. ins Unendliche, so muß man einmal auf eine Linie kommen, die kleiner als jede angegebene, wenn gleich noch so kleine, Linie ist. Eben diese Betrachtungen gelten auch von Zahlen. Eine Größe heißt demnach unendlich groß, wenn sie größer; unendlich klein, wenn sie kleiner werden kann als jede angegebene endliche Größe, wie groß oder wie klein diese auch seyn mag.

§. 284.

Grundsätze.

I. Unendlichgroße und unendlichkleine Größen (§. 283.) sind keine an sich bestimmte, in sich selbst abgeschlossene, sondern unbestimmte Größen. Ihre Wesenheit bestehet in der Eigenschaft, durch Vermehrung größer, durch Verminderung kleiner zu werden, als jede angegebene Größe.

II. Unendlich kleine Größen können gegen die ihnen gleichartigen endlichen, so wie die endlichen wiederum gegen die ihnen gleichartigen unendlich großen als verschwindende Größen, d. h. als solche angesehen werden, welche mit ihnen verglichen $= 0$ sind.

III. So wie die unendlich große Größe durch Zusetzung oder Wegnahme einer gleichartigen endlichen nicht vermehrt oder vermindert wird, so erleidet auch die endliche Größe durch das Hinzufügen oder Abziehen einer unendlich kleinen keine Veränderung ihrer Größe.

IV. Unendlich große und unendlich kleine Größen haben nur bey veränderlichen Größen Statt. Denn beständige Größen sind weder eines Wachsthums, noch einer Verminderung fähig, und ihr Werth bleibt sich gleich.

Erläuterung. Die Gleichung für den Kreis (§. 171.) war $y^2 = ax - x^2$. Hier ist der Durchmesser a eine beständige Größe, daher, als solche, keiner Vergrößerung oder Verkleinerung ins Unendliche fähig. Allein, die veränderliche Abscisse x kann von 0 bis zum Werthe a, in unendlich vielen Zwischenstufen, als wachsend angesehen werden. Jeder unendlich kleinen Zunahme dieser Abscisse correspondirt sodann auch eine verhältnißmäßige unendlich kleine Veränderung der ihr zugehörigen Ordinate.

§. 285.

Willkührlicher Satz. Das Zeichen einer unendlich großen Größe ist dieses ∞. Daher wird eine unendlich kleine Größe sehr füglich durch diesen Bruch $\frac{1}{\infty}$ dargestellt.

§. 286.

Erklärung. Eine Größe, welche gegen eine gegebene endliche Größe unendlich klein, und aus der Natur derselben abgeleitet ist, wird das Differential derselben genannt. Eine endliche Größe differentiiren heißt, eine ihr gleichartige finden, welche gegen diese gegebene unendlich klein ist. Die Differentialrechnung ist eine Anweisung, die Differentiale der Größen zu finden und zur Erreichung eines bestimmten Resultates anzuwenden.

§. 287.

Grundsätze. I. Nur veränderliche Größen haben Differentiale, oder können differentiirt werden (§. 284, IV.)

II. Das Differential einer jeden beständigen Größe ist $= o$, oder unveränderliche Größen haben kein Differential.

§. 288.

Willkührlicher Satz. Beständige Größen werden mit den ersten Buchstaben, veränderliche durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets ausgedrückt. Der Buchstabe d, welcher vor einer veränderlichen Größe stehet, ist das willkührliche Zeichen des Differentials dieser Größe. So heißt dx das Differential von x, dy jenes von y, wobey zu merken ist, daß der Buchstabe d hier keinen Factor der Größe bedeutet, vor welcher er sich befindet. Auch ist $da = o$, $d(b + c) = o$ u. s. f. (§. 287, II.).

§. 289.

Aufgabe. Größen, welche durch die Zeichen + und — verbunden, zu differentiiren.

Auflösung. Man setze die Differentiale aller einzelnen gegebenen, veränderlichen und beständigen Größen, mit den Zeichen dieser Größen, zusammen, so ergiebt sich das Differential der gegebenen Hauptgröße.

Beyspiele. I. $d(x + y) = dx + dy$

II. $d(a + x) = da + dx$, allein $da = o$ (§. 287, II.), folglich ist $d(a + x) = dx$.

III. $d(a^2 + x - bc - y) = dx - dy$.

IV. $d(b^2 - bc + a) = o$, u. s. w.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung ergiebt sich aus dem Begriffe des Differentials (§. 286.) und der Bedeutung der bekannten Zeichen + und — von selbst.

§. 290.

Aufgabe. Ein Product, welches aus zwey veränderlichen Größen besteht, z. B. xy, zu differentiiren.

Auflösung. $dxy = xdy + ydx$.

Beweis. Da x und y veränderliche Größen sind, so lasse man x um dx, y um dy größer werden und multiplicire nun

$x + dy$ mit
$y + dy$ so bekömmt man

$xy + ydx + xdy + dydx$, wovon
xy abgezogen, die Größen

$xdy + ydx + dxdy$ übrig läßt, welche daher das

Differential von xy sind. Allein das Product dxdy kann als o angesehen werden, denn $dx = \frac{1}{\infty}$, $dy = \frac{1}{\infty}$ (§. 285 und 286.) folglich $dxdy = \frac{1}{\infty}^2$, oder gegen das Unendlichkleine ($\frac{1}{\infty}$) selbst wieder unendlich klein, und daher verschwindend. Demnach wird $dxy = xdy + ydx$.

§. 291.

Zusatz. Wenn der eine Factor eine beständige, der andere eine veränderliche Größe ist, so ist das Differential des Productes dem Differentiale des veränderlichen Factors multiplicirt mit der beständigen Größe gleich; z. B. $dax = adx$. Denn $dax = adx + xda$ (§. 290.). Allein da $da = 0$ (§. 287, II.) folglich auch $xda = 0$, und $dax = adx$.

§. 292.

Zusatz. $dxyz = xydz + xzdy + yzdx$.
Denn es sey $yz = v$, so ist $dxyz = dxv = xdv + vdx$ (§. 290.) Allein es wird $dv = dyz = ydz + zdy$ (§. 290.), folglich $xdv = x(ydz + zdy) = xydz + xzdy$, und $vdx = yzdx$. Daher denn auch $xdv + vdx = dxv = dxyz = xydz + xzdy + yzdx$.

§. 293.

Zusatz. Auf vollkommen ähnliche Weise (wie im vor. §.) findet man $dwxyz = wxydz + xyzdw + yzwdx + zwxdy$.

Überhaupt folgt hieraus nachstehende allgemeine Regel: Das Differential eines aus veränderlichen Größen bestehenden Productes wird gefunden, wenn man der Reihe nach das Differential jedes Factors mit allen noch übrigen Factoren multiplicirt und diese sämmtlichen Producte

zusammen addirt. Enthält das gegebene Product theils veränderliche, theils beständige Größen, so ist nur zu bemerken, daß das Differential jeder dieser beständigen Größen = o wird, und folglich alle Theilproducte verschwinden, worinn solche Differentiale als Factoren erscheinen. Z. B. $dabx = abdx$; denn $bxda = o$ und $xadb = o$. (§. 287, II).

§. 294.

Aufgabe. Eine veränderliche Größe, welche sich auf der zweyten Potenz befindet, z. B x^2, zu differentiiren.

Auflösung. $dx^2 = 2xdx$.

Beweis. $dx^2 = dxx$, allein $dxx = xdx + xdx$ (§. 290.) $= 2xdx$.

§. 295.

Zusatz. $dx^3 = 3x^2dx$. Denn $dx^3 = dxxx = xxdx + xxdx + xxdx$ (§. 290.) $= x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$.

§. 296.

Zusatz. Auf gleiche Weise findet man $dx^4 = 4x^3dx$; $dx^5 = 5x^4dx$, und überhaupt, $dx^m = mx^{m-1}dx$. Hieraus fließt folgende Regel: Man multiplicire die um einen Grad erniedrigte Potenz der veränderlichen Größe mit dem unveränderten Exponenten, und dies Product sodann noch mit dem Differentiale dieser Größe.

§. 297.

Aufgabe. Einen aus zwey veränderlichen Größen bestehenden Bruch, z. B. $\frac{x}{y}$, zu differentiiren.

Auflösung. $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

Beweis. Es sey $\frac{x}{y} = v$, so wird $x = vy$ und $dx = vdy + ydv$; daher $dx - vdy = ydv$ und $\frac{dx - vdy}{y} = dv$. Allein $v = \frac{x}{y}$, folglich wird nun $\left(dx - \frac{x}{y}dy\right) : y = d\frac{x}{y} = \left(\frac{ydx - xdy}{y}\right) : y$; oder $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Hieraus entspringt die Regel: Man multiplicire den Nenner mit dem Differentiale des Zählers, und den Zähler mit dem Differentiale des Nenners. Das letztere Product vom erstern abgezogen und der Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt, giebt zum Quotienten das gesuchte Differential des Bruches.

§. 298.

Zusatz. I. $d\frac{a}{y} = \frac{yda - ady}{y^2} = \frac{-ady}{y^2}$.

II. $d\frac{x}{a} = \frac{adx - xda}{a^2} = \frac{adx}{a^2} = \frac{dx}{a}$.

III. $d\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{bydax - axdby}{b^2y^2}$ (§. 297.)

$= \frac{byadx - axbdy}{b^2y^2}$ (§. 291.) $= \frac{abydx - abxdy}{b^2y^2}$.

§. 299.

Anmerkung. Sämmtliche Differentiale können aus der allgemeinen Formel (§. 296.) $dx^m = mx^{m-1}dx$ abgelei-

tet werden. Zur bequemern Übersicht folgen die wichtigsten hierbey.

I. $d(ax) = d(ax^1) = 1.ax^{1-1}dx = ax^0 dx = adx.$

II. $d\left(\sqrt[m]{x}\right) = d\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx = \frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}dx$

$= \frac{1}{m}\sqrt[m]{x^{1-m}}\,dx.$

III. $d(a\sqrt{x}) = d(ax^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ax^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{adx}{2\sqrt{x}}.$

IV. $d\left(\frac{a}{x}\right) = d(ax^{-1}) = -ax^{-2}dx = \frac{-adx}{x^2}.$

V. $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$

$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$

VI. $d\left(\frac{ay^3}{x^2}\right) = d(ay^3x^{-2}) = 3ax^{-2}y^2dy -$

$2ay^3x^{-3}dx = \frac{3axy^2dy - 2ay^3dx}{x^3}.$

VII. $d\left(\frac{a^2b}{xy}\right) = d(a^2bx^{-1}y^{-1}) = -a^2by^{-1}$

$x^{-2}dx - a^2bx^{-1}y^{-2}dy = \frac{-a^2bydx}{y^2x^2} - \frac{a^2bxdy}{y^2x^2}$

$= \frac{-a^2bydx - a^2bxdy}{x^2y^2}.$

VIII. $d\left(\frac{a}{\sqrt{x^3}}\right) = d\left(ax^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\,ax^{-\frac{5}{2}}\,dx =$ $\frac{-3\,adx}{2\sqrt{x^5}}$.

IX. In der Gleichung für den Kreis ist $y^2 = ax - x^2$ (§. 171); daher $2ydy = adx - 2xdx$, und $\frac{(a - 2x)\,dx}{2y} = dy$. Da nun $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, so ist auch $dy = \frac{(a - 2x)\,dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$.

X. Das Differential von $\frac{x + y}{z}$ wird gefunden, wenn man $x + y = v$ setzt, denn nun ist $d\left(\frac{v}{z}\right) = \frac{zdv - vdz}{z^2} = \frac{zd\,(x + y)}{z^2} - \frac{(x + y)\,dz}{z^2} = \frac{zdx + zdy - xdz - ydz}{z^2}$.

XI. Das Differential von $\frac{a^2 + bx}{a - x}$ findet man, wenn man für den Zähler z, für den Nenner y setzt. Hier wird sodann $d\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{ydz - zdy}{y^2} = \frac{(a - x)\,bdx + (a^2 + bx)dx}{(a - x)^2}$.

XII. In $d\left(a + bx^{n}\right)^{m}$ setze man $a + bx^{n} = P$, so ist $dP = nbx^{n-1}\,dx$, und $dP^{m} = mP^{m-1}\,dP$; folglich wird $d\left(a + bx^{n}\right)^{m} = m\left(a + bx^{n}\right)^{m-1} \cdot nbx^{n-1}\,dx = bnm\left(a + bx^{n}\right)^{m-1} x^{n-1}\,dx$.

XIII. $d(a + bx^2)^3\,(c + fx)^2$ wird gefunden, wenn man

$a + bx^2 = p$, $c + fx = q$ setzt. Nun ist dieses Differential $= d\,(p^3 q^2) = p^3 . 2qdq + q^2 . 3p^2\,dp$. Allein $dq = fdx$, und $dp = 2bxdx$; folglich $d\,(p^3 q^2) = 2\,(c + fx)\,(a + bx^2)^3\,fdx + 2.\;3\,(c + fx)^2\,(a + bx^2)^2\,bxdx$.

Diese wenigen Vordersätze sind hinreichend, um sogleich einige Anwendungen der Differentialrechnung auf geometrische Gegenstände zu zeigen, wodurch der Anfänger zugleich eine deutlichere Einsicht in dem Gebrauch dieses Calculs erlangen wird.

II. Geometrische Aufgaben zur Erweiterung der Lehre von den Kegelschnitten.

1. Von Tangenten und Subtangenten.

§. 300.

Erklärung. Es sey *AMB* (Fig. 61.) eine algebraische Curve, *AP* eine Abscisse und *PM* die ihr zugehörige Ordinate. Wenn man sich nun durch den beliebigen Punct *M* eine gerade Linie denket, welche diese Curve nur in dem Puncte *M* berühret, so heißt diese zwischen dem Berührungspuncte *M* und der verlängerten Axe *QA* enthaltene gerade *MT* die Tangente der Curve *AMB*. Das Stück *TP*, welches zwischen der Ordinate *MP* und dem Punct *T* liegt, wird ihre Subtangente genannt.

§. 301.

Aufgabe. Vermittelst der Differentialrechnung eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Tangente einer algebraischen Curve zu finden.

Auflösung. Man lasse die Abscisse $AP = x$, um ein unendlich kleines Stückchen $Pp = dx$ zunehmen, so wird die Ordinate $PM = y$ in pm verwandelt, und, wenn man $MR \# PQ$ zieht, um das Stückchen $Rm = dy$ vermehret. Da nun auch der Bogen Mm unendlich klein ist, so kann er als ein Theil der Tangente OMT, und das Dreyeck MRm als ein rechtwinkeliges angesehen werden. Daher ist hier $Mm^2 = MR^2 + Rm^2 = Pp^2 + Rm^2 = dx^2 + dy^2$, und $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Nun ist aber $\triangle\ MRm \backsim \triangle\ TPM$, folglich $RM : Mm = PM : TM$, oder wenn man für diese Werthe die ihnen gleichen setzt, $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y : TM$. Daher wird $MT = \frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, welches die zufindende allgemeine Formel für die Tangente einer jeden algebraischen Curve ist.

Um aber diesen allgemeinen Ausdruck für einzelne krumme Linien anwendbar zu machen, muß aus der Gleichung, welche ihre Natur bestimmt (§. 167.), der Werth von dx oder dy abgeleitet, und in dieser Formel anstatt dx oder dy eingesetzt werden. Durch dieses Verfahren werden die sämmtlichen Differentiale aus derselben verschwinden, und man wird für die Tangente einen bestimmten endlichen Werth erhalten. Folgende Aufgaben werden dieses deutlicher machen, als es durch viele Regeln geschehen kann.

§. 302.

Aufgabe. Den Werth der Tangente in der Parabel zu finden.

Auflösung. Es sey *AMB* (Fig. 61.) die gegebene Parabel, und *MT* die durch den Punct *M* gehende Tangente, welche bestimmt werden soll. Wenn man in der Gleichung für die Parabel $y^2 = px$ (§. 179.) beyderseits differentiirt, so erhält man $2ydy = pdx$ (§. 294 u. 291), folglich $dx = \frac{2ydy}{p}$ und $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Wird nun die (§. 301.) gefundene allgemeine Formel $MT = \frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ zum Quadrate erhoben, so ist $MT^2 = \frac{y^2}{dy^2} \times (dx^2 + dy^2) = \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dy^2} = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$. Setzt man nun in diesen Ausdruck den so eben für dx^2 gefundenen Werth, so wird $MT^2 = y^2 + \frac{y^2}{dy^2} \times \frac{4y^2dy^2}{p^2} = y^2 + \frac{4y^4}{p^2}$ (*A*). Allein es ist $y^2 = px$; folglich $MT^2 = px + \frac{4p^2x^2}{p^2} = px + 4x^2$, und endlich $MT = \sqrt{(px + 4x^2)}$.

§. 303.

Zusatz. Aus dieser Formel entsteht folgende allgemeine Regel:

Wenn man zu dem vierfachen Quadrate der durch den gegebenen Punct der Parabel bestimmten Abscisse das Rechteck aus dieser Ab-

scisse und dem Parameter addirt, und aus dieser Summe die Quadratwurzel zieht, so ist diese der durch jenen gegebenen Punct gehenden Tangente der Parabel gleich.

§. 304.

Zusatz. Um sich auch durch die Elemente der höhern Geometrie von der Richtigkeit dieser Formel zu überzeugen, bemerke man Nachstehendes: In dem rechtwinkeligen Dreyecke TPM ist $TM^2 = MP^2 + PT^2$. Allein es ist $MP^2 = y^2 = px$, und $PT^2 = (TA + AP)^2 = (AP + AP)^2$ (§. 192. *II.*) $= (x + x)^2 = 4x^2$. Folglich wird $TM^2 = px + 4x^2$ und $TM = \sqrt{(px + 4x^2)}$ wie oben (§. 302.).

§. 305.

Zusatz. In der obigen Auflösung (§. 302.) ist aus der Gleichung für die Parabel der Werth von dx bestimmt und in die allgemeine Tangentenformel (§. 301.) eingetragen worden. Daß dies nicht gerade nothwendig sey, sondern auf ähnliche Weise auch der Werth von dy in diese Formel gesetzt werden könne, um dasselbige Resultat zu erhalten, lehrt nachfolgende Rechnung. Wenn man die Gleichung $y^2 = px$ differentiirt, so wird $2ydy = pdx$, woraus denn $dy = \frac{pdx}{2y}$ und $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$ folget. Diesen Werth von dy^2 in die Formel $MT^2 = \frac{y^2}{dy^2} \times (dx^2 + dy^2)$ gesetzt, giebt $MT^2 = \frac{4y^4}{p^2dx^2} \times \left(dx^2 + \frac{p^2dx^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^4}{p^2} + y^2$, wie oben (§. 302, *A.*) gefunden worden ist.

§. 306.

Aufgabe. Die Tangente an dem Kreise zu finden.

Auflösung. Es sey *AMB* (*Fig.* 62.) ein gegebener Halbkreis, *M* ein in dessen Peripherie genommener beliebiger Punct, und *MT* die zu findende Tangente. Da hier $MP^2 = AB \times AP - AP^2$, oder $y^2 = ax - x^2$ (§. 171.) ist, so bekömmt man durch die Differentiation dieser Gleichung $2ydy = adx - 2xdx$ (§. 294 u. 291) $= (a - 2x)\,dx$; folglich $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$ und $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{(a-2x)^2}$.

Substituirt man nun diesen Werth von dx^2 in die allgemeine Formel $MT^2 = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$, so wird $MT^2 = y^2 + \frac{y^2}{dy^2} \times \frac{4y^2dy^2}{(a-2x)^2} = y^2 + \frac{4y^4}{(a-2x)^2}$ (B). Da nun $y^2 = ax - x^2$, so erhält man $TM^2 = ax - x^2 + \frac{4(ax - x^2)^2}{(a-2x)^2} = ax - x^2 + \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a-2x)^2}$ (*A*). Wird nun hier alles unter den gemeinschaftlichen Nenner $(a - 2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$ gebracht und gehörig reducirt, so ist $TM^2 = \frac{a^3x - a^2x^2}{(a-2x)^2}$. Und daher $TM = \frac{\sqrt{(a^3x - a^2x^2)}}{a - 2x} = \frac{\sqrt{a^2(ax - x^2)}}{a - 2x} = \frac{a\sqrt{(ax - x^2)}}{a - 2x}$. Nun ist aber auch $\sqrt{(ax - x^2)} = y$, folglich wird $TM = \frac{ay}{a - 2x}$.

§. 307.

Zusatz. Aus dieser Formel fließet die Regel: Man multiplicire die durch den Tangentenpunct ge-

hende Ordinate des Kreises mit dessen Durchmesser und dividire dieses Product durch die Differenz des Durchmessers und der doppelten Abscisse, so ist der Quotient die gesuchte Tangente.

§. 308.

Zusatz. Eben diese Formel (§. 306.) findet man wieder durch die gewöhnliche Geometrie. Denn in dem rechtwinkeligen Dreyecke *TPM* ist $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (*A*). Da aber wegen des rechtwinkeligen Dreyeckes *TMQ*, $PM^2 = PT \times PQ$, und auch $PM^2 = PA \times PB$ ist; so wird $PT \times PQ = PA \times PB$, und folglich $PQ : PA = PB : PT$, oder $\frac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$; daher denn $PT = \frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}$, und $PT^2 = \left\{\frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}\right\}^2$ $= \frac{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4}{\left(\frac{a - 2x}{2}\right)^2} = \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$. Da nun ferner $PM^2 = y^2 = ax - x^2$, so wird auch $TM^2 = ax - x^2 + \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a - 2x)^2}$, gerade wie oben (§. 306, *A*.)

§. 309.

Zusatz. Eben diesen Werth findet man für *TM*, wenn in der Differentialgleichung $2ydy = adx - 2xdx$ (§. 306.) der Werth von dy bestimmt, und dy^2 sodann in die allgemeine Tangentenformel substituirt wird. Jenes giebt d $= \frac{adx - 2xdx}{2y}$, woraus denn

$dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4y^2}$ wird. Nach diesem erhält man $TM^2 = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2} = y^2 + \frac{y^2dx^2 \times 4y^2}{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2} = y^2 + \frac{4y4}{a^2 - 4ax + 4x^2} = y^2 + \frac{4y^4}{(a - 2x)^2}$, wie oben (§. 306, B.).

§. 310.

Aufgabe. Durch die Differentialrechnung eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Subtangente (§. 300.) einer algebraischen Curve zu finden.

Auflösung. Es sey wieder *AMB* (*Fig.* 61.) die gegebene Curve, *M* ein willkührlicher Punct in ihr, *MP* die durch denselben gehende Ordinate, *MT* die Tangente; so ist *PT* die zu bestimmende Subtangente. Setzt man nun $Pp = dx$, $pm \# PM$, $MR \# PT$; so ist $mR = dy$, und das kleine Dreyeck *MRm* als ein rechtwinkeliges geradliniges anzusehen, welches $\sim \triangle TPM$. Daher hat man $mR : RM = MP : PT$, oder $dy : dx = y : PT = \frac{ydx}{dy}$, welches die zu findende allgemeine Formel für die Subtangente ist.

§. 311.

Aufgabe. Die Subtangente in der Parabel zu finden.

Auflösung. Wenn *AMB* (*Fig.* 61.) die gegebene Parabel ist, so differentiire man die bekannte Gleichung dieser Curve (§. 179.) $y^2 = px$, woraus man $2ydy = pdx$

erhält, (§. 294 u. 291.) und folglich $dy = \frac{pdx}{2y}$. Wird nun dieser Werth in die (§. 310.) gefundene Formel $PT = \frac{ydx}{dy}$ gesetzt, so ist $PT = \frac{ydx \times 2y}{pdx} = \frac{2y^2}{p}$. Da aber $y^2 = px$, so wird nun $PT = \frac{2px}{p} = 2x$.

§. 312.

Zusatz. Hieraus entspringt die allgemeine Regel: In der Parabel ist die Subtangente der doppelten Abscisse gleich. Soll daher an den Punct *M* der Parabel eine Tangente gezogen werden, so fälle man das Loth *MP* auf *AQ*, mache *AT* = *AP* und ziehe *TM*; so ist diese die verlangte Tangente.

§. 313.

Zusatz. Eben diese Formel erhält man, durch die bekannten Eigenschaften der Parabel, auch noch auf diese Weise. Oben (§. 192.) wurde bewiesen, daß (*Fig.* 32.) △ *GKM* ≅ △ *FKM*; folglich ist *GK* = *FK*. Da nun ferner W. *GKM* = W. *FKT* und wegen *GM* ‡ *PT*, auch W. *KGM* = W. *KFT*; so ist △ *GKM* ≅ △ *FKT* und *GM* = *FT* = *EP*. Da nun auch *FA* = *EA* (§. 183, 188.), so ist *AT* = *AP*, folglich *PT* = 2*PA*.

§. 314.

Zusatz. Die Formel $PT = 2x$ (§. 311.) kann auch durch Bestimmung von dx, und durch Substitution dieses Werthes in die allgemeine Gleichung $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 310.) gefunden werden. Aus der Differentialgleichung $2ydy =$

$p dx$ folgt nämlich $dx = \frac{2ydy}{p}$. Daher wird $PT = \frac{2y^2dy}{pdy}$ $= \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, wie vorhin.

§. 315.

Aufgabe. Die Subtangente in dem Kreise zu bestimmen.

Auflösung. Es sey M (*Fig.* 62.) der gegebene Punct in dem Halbkreise AMB, MT die Tangente, MP die Ordinate und TP die zu findende Subtangente; so ist bekanntlich $y^2 = ax - x^2$ (§. 306.). Die Differentiation giebt $2ydy$ $= adx - 2xdx$, folglich $dy = \frac{adx - 2xdx}{2y}$. Setzt man diesen Werth in die allgemeine Subtangentenformel $TP = \frac{ydx}{dy}$, so wird $TP = \frac{ydx \times 2y}{adx - 2xdx} = \frac{2y^2}{a - 2x}$ $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}$, woraus die Proportion folget:

$\frac{a}{2} - x : x = a - x : TP$, oder

$AQ - AP : AP = AB - AP : TP$, oder

$PQ : AP = PB : TP$.

§. 316.

Zusatz. Hieraus ergiebt sich diese Regel: **Der Unterschied zwischen dem Halbmesser und der Abscisse verhält sich zur Abscisse, wie der Unterschied des Durchmessers und der Abscisse zur Subtangente.**

§. 317.

Zusatz. Wenn man den Halbmesser QM ziehet, so ist W. $TMQ = R$, und $PM^2 = TP \times PQ$. Desgleichen ist auch $PM^2 = AP \times PB$, woraus die Proportion $PQ : AP = PB : TP$ folget, wie vorhin (§. 315.).

§. 318.

Zusatz. Auch hier könnte man in der Differentialgleichung (§. 315.) $2ydy = adx - 2xdx$ den Werth von dx bestimmen, welches $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$ giebt. Wird dieser Werth in die Formel $TP = \frac{ydx}{dy}$ gesetzt, so ergiebt sich $TP = \frac{2y^2dy}{(a-2x)\,dy} = \frac{2y^2}{a-2x}$, gerade wie zuvor (§. 315.).

§. 319.

Aufgabe. Die Subtangente in der Ellipse zu finden.

Auflösung. Es sey AMB (*Fig.* 63.) die halbe Ellipse, ihre große Axe $AB = a$, ihr Parameter $= p$, $AP = x$, $PM = y$; so ist (nach §. 195.) $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, oder $ay^2 = apx - px^2$. Differentiirt man beyderseits, so wird $2aydy = apdx - 2pxdx$, folglich $\frac{2aydy}{ap - 2px} = dx$. Aus der allgemeinen Formel $\frac{ydx}{dy}$ wird sonach $PT = \frac{2ay^2dy}{(ap - 2px)\,dy} = \frac{2ay^2}{ap - 2px}$. Da aber $ay^2 = apx - px^2$, so wird hier $PT = \frac{2apx - 2px^2}{ap - 2px} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

$= \frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}$, woraus man sieht, daß die Formel für die Subtangente bey der Ellipse mit der oben (§. 315.) für den Kreis gefundenen vollkommen übereinstimmend ist.

§. 320.

Anmerkung. Der geometrische Beweis dieser und der folgenden Aufgabe wird hier nicht ausgeführt, weil er aus der Natur dieser Curve leicht zu finden ist.

§. 321.

Aufgabe. Die Subtangente in der auf die Axe bezogenen Hyperbel zu finden.

Auflösung. Die bekannte Gleichung für die Hyperbel ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 224.) oder $ay^2 = apx + px^2$. Dieses differentiirt giebt $2aydy = apdx + 2pxdx$, oder $dx = \frac{2aydy}{ap + 2px}$. Wird nun die Substitution in die Gleichung $\frac{ydx}{dy}$ vorgenommen, so erhält man $PT = \frac{y}{dy} \times \frac{2aydy}{ap + 2px} = \frac{2ay^2}{ap + 2px} = \frac{2apx + 2px^2}{ap + 2px} = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} = \frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} + x}$, woraus die Proportion $\frac{a}{2} + x : x = a + x : PT$ folget.

§. 322.

Zusatz. Die hierdurch bewiesene Regel heißt: Die

Summe der halben Queraxe und der Abscisse verhält sich zur Abscisse wie die Summe der ganzen Queraxe und der Abscisse sich zur Subtangente verhält.

2.) Von den Normalen und Subnormalen.

§. 323.

Erklärung. Es sey *AMB* (*Fig.* 61.) eine algebraische Curve, M ein beliebiger Punct in ihr und MT die durch ihn gehende Tangente. Errichtet man aus M auf MT ein Loth M*Q*, welches in *Q* die Axe T*Q* schneidet, so heißt diese M*Q* die Normale, das zwischen dem Puncte *Q* und dem durch die Ordinate M*P* bestimmten Puncte *P* liegende Stück *QP* die Subnormale dieser Curve.

§. 324.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die Normale in irgend einer algebraischen Curve zu finden.

Auflösung Die rechtwinkeligen Dreyecke M*R*m und M*PQ* (*Fig.* 61.) haben, ausser den rechten Winkeln bey *R* und *P*, noch die spitzen W. *R*Mm und *Q*M*P* gemein. Denn W. *Q*M*R* + W. *R*Mm = *R*; auch W. *Q*M*R* + W. *Q*M*P* = *R*; folglich ist △ M*R*m ∽ △ M*PQ*, und man hat M*R* : Mm = M*P* : M*Q*, oder dx : $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y : MQ$; folglich $MQ = \frac{y}{dx}$ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Wird nun in dieser Formel der aus der Natur der gegebenen Curve abgeleitete Werth von dx^2 oder dy^2 substituirt,

so verschwinden alle Differentialgrößen aus ihr und die Normale wird in endlichen Größen bestimmt.

§. 325.

Aufgabe. Die Normale in der Parabel zu finden.

Auflösung. In der Parabel ist $y^2 = px$, folglich $2ydy = pdx$, und $dx = \frac{2ydy}{p}$, auch $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$.

Aus $MQ = \frac{y}{dx} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (vor. §.) erhält man

$MQ^2 = \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dx^2} = y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$. Wird hierin für dx^2 der so eben gefundene Werth gesetzt, so ist $MQ^2 = y^2 + \frac{y^2dy^2 \times p^2}{4y^2dy^2} = y^2 + \frac{p^2}{4}$. Da nun $y^2 = px$, so wird auch $MQ^2 = px + \frac{p^2}{4} = \frac{4px + p^2}{4}$ und

$MQ = \frac{1}{2} \sqrt{(4px + p^2)}$.

§. 326.

Zusatz. Um die Richtigkeit der eben gefundenen Formel ohne Differentialrechnung zu übersehen, betrachte man die ähnlichen Dreyecke TPM und MPQ (*Fig.* 61.), worin $TP : TM = MP : MQ$ ist. Nun war aber $TP = 2x$, (§. 313.) $TM = \sqrt{(px + 4x^2)}$ (§. 302.), folglich hat man nun

$2x : \sqrt{(px + 4x^2)} = y : MQ$, oder

$4x^2 : px + 4x^2 = y^2 : MQ^2$, oder

$4x^2 : px + 4x^2 = px : MQ^2$, folglich

$MQ^2 = (px + 4x^2) \frac{px}{4x^2} = \frac{p^2x^2 + 4px^3}{4x^2} =$

$\frac{p^2 + 4px}{4}$. Daher $MQ = \frac{\sqrt{(4px + p^2)}}{2}$ wie vorhin (§. 325.).

§. 327.

Aufgabe. Die Normale im Kreise zu bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung für den Kreis ist $y^2 = ax - x^2$, woraus $2ydy = adx - 2xdx$, und $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$ folget. Dies giebt ferner $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$ woraus man vermittelst der allgemeinen Formel $MQ^2 = y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$ (§. 325.) $MQ^2 = y^2 + \frac{a^2y^2dy^2 - 4axy^2dy^2 + 4x^2y^2dy^2}{4y^2dy^2} = y^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$ erhält. Aber $y^2 = ax - x^2$, folglich wird $MQ^2 = ax - x^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{4ax - 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, und $MQ = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$, d. h. in dem Kreise ist die Normale dem Halbmesser gleich, wie schon aus der Elementar-Geometrie bekannt ist.

§. 328.

Aufgabe. Die allgemeine Formel für die Subnormale (§. 323.) einer algebraischen Curve zu finden.

Auflösung. Da die Dreyecke MRm und MPQ (*Fig.* 61.) ähnlich sind (§. 324.), so ist $MR : Rm = MP :$

PQ, oder $dx : dy = y : PQ$, folglich wird $PQ = \frac{ydy}{dx}$, aus welcher allgemeinen Formel die Subnormalen einer jeden einzelnen Curve gefunden werden, wenn man den aus ihrer Natur bestimmten Werth von dy oder dx darin substituirt.

§. 329.

Aufgabe. Die Subnormale in der Parabel zu bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung dieser Curve $y^2 = px$ folget $2ydy = pdx$, und $dx = \frac{2ydy}{p}$. Daher wird (*Fig.* 61.) $PQ = \frac{ydy \times p}{2ydy} = \frac{p}{2}$. Eben dies wird durch Bestimmung von dy erhalten. Es ist nämlich $dy = \frac{pdx}{2y}$. Folglich wird $PQ = \frac{ypdx}{2ydx} = \frac{p}{2}$.

§. 330.

Zusatz. Hieraus folget die allgemeine Regel: Die Subnormale in der Parabel ist eine beständige Größe und immer dem halben Parameter gleich.

§. 331.

Zusatz. Da (*Fig.* 61.) $\triangle TPM \sim \triangle MPQ$, so ist $TP : PM = PM : PQ$, d. h.

$2x : y = y : PQ$, folglich

$PQ = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$, woraus denn die Wahrheit die-

ses Satzes (§. 330.), auch ohne die Differentialrechnung, folget.

§. 332.

Aufgabe. Die Subnormale in dem Kreise zu finden.

Auflösung. Aus der Gleichung für den Kreis: $y^2 = ax - x^2$ folget $2ydy = adx - 2xdx$, und $dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$. Folglich wird hier PQ (*Fig.* 62.) $= \frac{ydy}{dx}$

(§. 328.) $= \frac{ydy \times (a - 2x)}{2ydy} = \frac{a - 2x}{2} = \frac{a}{2} - x$.

§. 333.

Zusatz. Folglich ist die Subnormale im Kreise dem Unterschiede des Halbmessers und der Abscisse gleich, d. h. $PQ = AQ - AP$, was schon für sich evident ist.

§. 334.

Anmerkung. Die bisher betrachteten Aufgaben sollen dazu dienen, den Anfängern die ersten Anwendungen der Differentialrechnung auf geometrische Gegenstände zu zeigen. Damit sie sich um so inniger von der Richtigkeit dieses Calculs überzeugen möchten, wurden meist die Beweise aus der Elementar- und höhern Geometrie beygefügt. Nun soll eine weitere Anwendung dieser höhern Rechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten gemacht werden.

III. Vom Größten und Kleinsten.

1.) Vorbegriffe.

§. 335.

Erklärung. Es giebt Größen, welche dergestalt von einander abhängig sind, daß bey allmähliger Zunahme der ersten auch die zweyte größer wird, bis zu einer bestimten Grenze. Wenn diese überschritten ist, so wird bey dem fortgesetzten Wachsthume der ersten die zweyte wieder allmählig abnehmen. Wenn sich nun die zweyte Größe in diesem Grenzpuncte des Zu- und Abnehmens befindet, so heißt sie ein Größtes, Maximum. Wenn hingegen bey dem stufenweisen Größerwerden der ersten Größe, die zweyte allmählig kleiner wird, bis sie zu einem Grenzpuncte kömmt, über welchen hinaus sie bey Zunahme der ersten wiederum vergrößert wird, so wird sie in diesem Wendepuncte ein Kleinstes, Minimum, genannt.

Erläuterung. Es sey ADB (Fig. 64.) ein Halbkreis, AB dessen Durchmesser, AP eine Abscisse, und PM die ihr zugehörige Ordinate. Wenn hier die Abscisse AP in Ap übergeht, so wird PM in pm übergehen, und man sieht, daß mit Zunahme der Abscissen auch die zugehörigen Ordinaten größer werden. Dieses gegenseitige Wachsthum hat aber nur Statt, bis die Abscisse = AC und die Ordinate = CD wird. denn für größere Abscissen, wie AF, AG erhält man wieder kleinere Ordinaten FH, GK. Die Ordinate CD ist also hier ein Größtes unter allen andern.

Ferner sey FDG (Fig. 65.) ein Halbkreis, FG dessen Durchmesser, mit welchem ausserhalb des Kreises die gerade

AB parallel ist. Zieht man hier aus F das Loth FL auf AB, und setzt LP als Absciſſe; so ist PM die zugehörige Ordinate. Wird diese Absciſſe größer und = Lp, so wird die Ordinate pm kleiner, bis man für die Absciſſe = Lc die kleinste Ordinate = CD erhält. Denn wenn die Absciſſen ferner wachsen, und z. B. LH, LK werden, so nehmen die Ordinaten HV, KW wieder zu. Daher ist hier die Ordinate CD ein Kleinstes.

§. 336.

Anmerkung. Diese Größten und Kleinsten findet man nicht nur bey stetigen, sondern auch bey unstetigen Größen. Man nehme z. B. die Zahl 12 und zerlege sie in zwey Theile, deren jeder eine ganze Zahl ist, so wird $12 = 11 + 1 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5 = 6 + 6$.

Multipliciret man nun je zwey dieser Theile miteinander, so bekömmt man die Producte 11, 20, 27, 32, 35 und 36, unter welchen offenbar das letzte ein Größtes und das erste ein Kleinstes ist. Eben so verhält es sich in vielen andern Fällen, wovon unten Beyspiele vorkommen werden.

§. 337.

Grundsatz. Da das Größte und Kleinste der Wendepunct ist, in welchem zwey entgegengesetzte Zustände der Größen, ihr Größer- und Kleinerwerden, sich berühren (§. 335), so ist das Größte und Kleinste etwas Unveränderliches und Beständiges; Die unzähligen größere und kleinere Werthe hingegen, welche zuvor und nachher Statt finden können, sind Veränderliche und Unbeständige Größen.

§. 338.

Anmerkung. Daß es ausser dem Größten und Kleinsten unendlich viele Werthe geben müssen, folget für geometrische Fälle aus der Stetigkeit des Raumes. Denn zwischen P und C (*Fig.* 64. 65.) lassen sich unzählig viele Abscissenpuncte, und eben so zwischen PM und CD unzählich viele Ordinaten denken. Für aritmetische Anwendungen folget dies aus der unzählichen Menge von Zwischengliedern, welche man sich zwischen irgend zwey Zahlen z. B. zwischen 2 und 3 vorstellen kann. Auf diese Weise sieht man ein, daß die Zahl 12 (§. 336.) möglicher Weise auf unzählig manigfaltige Art aus zwey Theilen zusammengesetzt werden könne, wenn diese Theile gebrochene Zahlen sind.

§. 339.

Grundsatz. Da das Differential jeder beständigen Größe $= o$ ist (§. 287, II.), so muß auch das Differential vom Größten und Kleinsten $= o$ gesetzt werden.

2.) Geometrische Aufgaben vom Größten.

§. 340.

I. Aufgabe. In dem Halbkreise die größte Ordinate zu finden, welche auf dessen Durchmesser lothrecht stehet.

Auflösung. Es sey ADB (Fig. 64.) der gegebene Halbkreis, AP $= x$ irgend eine Abscisse, PM $= y$ die ihr zugehörige Ordinate, und der Durchmesser AB $= a$; so ist die Gleichung für den Kreis $y^2 = ax - x^2$, folglich differentiirt $2ydx = adx - 2xdx$. Da nun y ein Größtes werden soll, so ist $dy = o$ (§. 339.) und daher auch

$2ydy = o$. Also hat man $o = adx - 2xdx$, oder $2xdx = adx$, d. h. $2x = a$, oder $x = \frac{a}{2}$. Folglich ist die der größten Ordinate zugehörige Abscisse dem Halbmesser gleich, oder $x = AC$. Um auch den Werth jener Ordinate selbst zu finden, setze man $x = \frac{a}{2}$ in die Gleichung $y^2 = ax - x^2$; so wird $y^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$; folglich $y = \frac{a}{2}$, d. h. die größte Ordinate ist CD oder der Halbmesser selbst, wie schon aus der Elementar-Geometrie erwiesen ist.

§. 341.

II. **Aufgabe.** In der Ellipse, bey senkrechten Coordinaten, die größte Ordinate zu finden.

Auflösung. Aus der Gleichung für die Ellipse: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§.195.) erhält man $ay^2 = apx - px^2$, und durch Differentiation $2aydy = apdx - 2pxdx$. Da nun $dy = o$ (§. 339.), so ist auch $2aydy = o$, und man hat $o = apdx - 2pxdx$, oder $2pxdx = apdx$, folglich $2x = a$ und $x = \frac{a}{2}$. Da nun a die große Axe bedeutet, so erhält man die größte Ordinate, wenn man in der halben großen Axe ein Loth errichtet, und solches bis zur Ellipse verlängert. Dieses Loth ist die halbe kleine Axe, wie auch schon anderstwoher (§. 196 IV.) ersichtlich ist. Will man den Werth dieser größten Ordinate selbst bestimmen, so setze man die Größe $\frac{a}{2}$ für x in die Gleichung $ay^2 = apx - px^2$. Dieses giebt

$ay^2 = \frac{a^2p}{2} - \frac{a^2p}{4} = \frac{a^2p}{4}$, folglich $y^2 = \frac{a^2p}{4a} = \frac{ap}{4}$, wie oben (§. 198.).

§. 342.

III. Aufgabe. Es sey E (*Fig.* 66.) in der Mitte der Grundlinie DF des gleichschenkeligen Dreyecks ADF. Man soll innerhalb desselben ein gleichschenkeliges △ BEC construiren, welches ein Größtes ist.

Auflösung. Man setze AE $= a$, ED $= b$, AO $= x$; so ist OE $= a - x$, und weil AE : ED $=$ AO : OB, oder $a : b = x$: OB, so wird OB $= \frac{bx}{a}$. Nun ist △ ADF $= ab$, △ ABC $= \frac{bx}{a} \times x = \frac{bx^2}{a}$, △BDE $=$ △ CEF $= \frac{b \times (a - x)}{2}$ und △ BDE $+$ △ CEF $= ab - bx$. Daher hat man △ BEC $= ab - \frac{bx^2}{a} - ab + bx = bx - \frac{bx^2}{a}$. Da nun △ BEC ein Größtes ($=$ M) seyn soll, so wird $bx - \frac{bx^2}{a} =$ M oder $\frac{abx - bx^2}{a} =$ M. Differentiirt man diese Gleichung, so ist $abdx - 2bxdx = d$M $= o$ (§. 339.) folglich $abdx = 2\,bxdx$, oder $ab = 2\,bx$, oder $a = 2x$, d. h. $\frac{a}{2} = x$. Daher muß man das Loth AE in O halbiren, durch O die mit DF parallele BC, und sodann EB, EC ziehen, um das größte gleichschenkelige Dreyeck BEC zu erhalten.

§. 343.

Zusatz. Zur Übung hier noch drey andere Auflösungen der nämlichen Aufgabe.

I. Da OB $= \frac{bx}{a}$, und OE $= a - x$ ist (§. 342.); so wird $\triangle$ BEC $= (a - x)\frac{bx}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = M$, folglich alles Übrige, wie vorhin.

II. Setzt man AE $= a$, ED $= b$, und OE $= x$; so wird AO $= a - x$; und man hat $a : b = a - x$: OB, folglich OB $= \frac{ab - bx}{a}$, und daher $\triangle$ BEC $= \frac{ab - bx}{a} \times x = \frac{abx - bx^2}{a} = M$, wie zuvor.

III. Es sey AE $= a$, ED $= b$, AD $= c$, AB $= x$; so ist AD : AE $=$ AB : AO, oder $c : a = x : \frac{ax}{c} =$ AO, und EO $=$ AE $-$ AO $= a - \frac{ax}{c} = \frac{ac - ax}{c}$. Ferner ist AD : DE $=$ AB : BO, oder $c : b = x : \frac{bx}{c} =$ BO. Folglich ist $\triangle$ BEC $=$ EO $\times$ BO $= \frac{ac - ax}{c} \times \frac{bx}{c} = \frac{abcx - abx^2}{c^2} = M$. Dies differentiirt, giebt

$abcdx - 2abxdx = o$, oder

$abcdx = 2abxdx$, oder

$c = 2x$, d. h. $\frac{c}{2} = x$, d. h. AB $= \frac{1}{2}$ AD, wie oben.

§. 344.

IV. Aufgabe. In einem gleichschenkeligen Dreyecke sey jeder der gleichen Schenkel $= a$. Unter welchem Winkel müssen sie zusammengesetzt seyn, damit dieses Dreyeck ein Größtes ist?

Auflösung. Es sey $AB = AC$, (Fig. 67.) $= a$, $BD = DC = x$, und das Loth $AD = b$; so ist $a^2 - x^2 = b^2$, folglich $\sqrt{(a^2 - x^2)} = b$, und $\triangle ABC = x\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Da nun $\triangle ABC$ ein Größtes seyn soll, so ist $x\sqrt{(a^2 - x^2)} = M$. Quadrirt man auf beyden Seiten, so wird $x^2(a^2 - x^2) = M^2$, oder $a^2x^2 - x^4 = M^2$, welches differentiirt, $2a^2 x dx - 4x^3 dx = o$ giebt. Hieraus folget aber $2a^2 x dx = 4x^3 dx$, oder $\frac{2a^2}{4} = x^2$, und endlich $\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x$, d. h. $\sqrt{\tfrac{1}{2}AB^2} = BD$. Nun ist aber aus der Elementar-Geometrie bekannt, daß, nur wenn W. $BAC = R$ ist, $\sqrt{\tfrac{1}{2}AB^2} = BD$ seyn könne; folglich müssen die Schenkel AB und AC unter einem rechten Winkel zusammengesetzt seyn, wenn das $\triangle BAC$ das Größte seyn soll, welches aus diesen Schenkeln gebildet werden kann.

§. 345.

Zusatz. Vorstehende Aufgabe kann auch noch auf nachfolgende Art aufgelöset werden. Es sey, wie vorhin, $BA = AC = a$, aber die zu suchende Seite $BC = x$. Hier wird (nach §. 146.)

$\triangle BAC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(4a^2 - x^2)\,x^2} = M$, also $\frac{4a^2x^2 - x^4}{16} = M^2$, oder $8a^2 x dx - 4x^3 dx = o$, folglich $8a^2 x dx = 4x^3 dx$, daher

$$\frac{8a^2}{4} = \frac{x^3}{x}, \text{ und } 2a^2 = x^2.$$

Da nun nur in dem rechtwinkeligen Dreyecke $a^2 + a^2 = x^2$ ist, so muß BAC ein solches Dreyeck seyn.

§. 346.

Zusatz. Daß die gegebenen Seiten BA = AC rechtwinkelig müssen zusammengesetzt werden, um das größte Dreyeck zu bilden, folgt auch nach der Elementar-Geometrie schon daraus, weil sowohl bey W. BAC > R, oder W. BAC < R ein von B auf CA oder ihre Verlängerung gefälltes Loth immer kleiner als BA ist. Folglich muß das Product aus diesem Lothe in die Grundlinie AC am größten seyn, wenn W. BAC = R ist.

§. 347.

V. Aufgabe. In einen Halbkreis das größte Rechteck dergestalt zu construiren, daß dessen eine Seite längs des Durchmessers fällt.

Auflösung. Wenn ANB (Fig. 68.) der gegebene Halbkreis, und DGHK das zu findende Rechteck ist; so setze man CA $= a$, und CD $= x$. Da nun $CG^2 = GD^2 + DC^2$, so wird $GD^2 = a^2 - x^2$, und $GD = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Daher ist des Rechtecks Inhalt $= GD \times 2\,DC = 2x \times \sqrt{(a^2 - x^2)} = M$. Dies giebt $4x^2\,(a^2 - x^2) = M^2$, oder $4a^2x^2 - 4x^4 = M^2$, folglich auch $8a^2x\,dx - 16x^3\,dx = o$, oder $8a^2x\,dx = 16x^3\,dx$, und

$$\frac{8a^2}{16} = \frac{x^3}{x}, \text{ d. h. } \frac{a^2}{2} = x^2.$$

Um diesen Werth zu construiren, beschreibe man über CA $= a$ einen Halbkreis CFA, errichte aus dessen Mittelpunct

E das Loth EF, und ziehe CF; so ist $CF^2 = 2CE^2 = \frac{2a^2}{4}$ $= \frac{a^2}{2}$. Also ist $CF = x$. Wird nun CF aus C in D getragen, so ergiebt sich der Punct D, und somit das größte Rechteck DGHK.

§. 348.

Zusatz. Da $GD^2 = CG^2 - CD^2$, so wird nun durch Substitution, $GD^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$. Folglich ist GD $= CD$, oder $GD = \frac{1}{2} DK$, d. h. des größten Rechtecks Höhe ist die Hälfte seiner Grundlinie.

§. 349.

Zusatz. Ergänzt man auf der andern Seite von AB den zweyten Halbkreis, und construirt das größte Rechteck darin; so ist leicht zu sehen, daß nun beyde Rechtecke zusammen ein Quadrat bilden. (§. 348.) Da aber jedes Rechteck in dem dazugehörigen Halbkreise ein Größtes ist, so muß auch ihre Summe, d. h. das Quadrat ein Größtes im ganzen Kreise seyn. Daher ist das größte Rechteck, welches in einem Kreise construirt werden kann, ein Quadrat.

§. 350.

VI. Aufgabe. In der geraden Linie AB (Fig. 69.) einen Punct D zu finden, so daß $AD^2 \times DB$ ein Größtes sey.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $DB = a - x$, und man hat $x^2 \times (a - x) = M$, folglich

$ax^2 - x^3 = M$, und

$2axdx - 3x^2dx = o$; daher

$2ax = 3x^2$, und $\frac{2}{3}a = x$. Also muß AD $= \frac{2}{3}$ AB gemacht werden.

§. 351.

Zusatz. Auch findet noch folgende Auflösung Statt. Es sey AB $= a$, DB $= x$; so ist AD $= a - x$, und es wird

$(a - x)^2 x = M$; daher
$(a^2 - 2ax + x^2) x = M$, oder
$a^2x - 2ax^2 + x^3 = M$, folglich
$a^2 dx - 4axdx + 3x^2 dx = 0$, und
$a^2 dx + 3x^2 dx = 4axdx$, daher
$a^2 + 3x^2 = 4ax$, und
$3x^2 - 4ax = - a^2$,
$x^2 - \frac{4ax}{3} = - \frac{a^2}{3}$; ergänzt man hier das Quadrat des ersten Theils der Gleichung, so wird

$x^2 - \frac{4ax}{3} + \frac{4a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{9}$; also $x - \frac{2a}{3} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{9}} = \pm\frac{a}{3}$, und $x = \frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$. Dies giebt $x = a$, und $x = \frac{a}{3}$. Da der erste Werth hier unbrauchbar ist, so gilt der zweyte, und es ist wieder DB $= \frac{1}{3}$ AB, wie oben.

§. 352.

Zusatz. Da das Product $AD^2 \times DB$ den Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums von quadratischer Grundfläche ausdrückt, so wird dieser Körper, dessen Höhe nebst der Seite seiner Basis einer gegebenen geraden Linie 1 gleich ist, ein Größtes, wenn man die Seite der Grundfläche $= \frac{2}{3}$ 1, und die Höhe $= \frac{1}{3}$ 1 setzt.

§. 353.

Zusatz. Eine andere Anwendung findet diese Aufgabe auf Zahlen. Um nämlich eine Zahl so in zwey Theile zu theilen, daß das Product aus dem Quadrate des einen Theils in den andern ein Größtes sey, erhebe man zwey Drittheile derselben zum Quadrate, und multiplicire dieses mit dem einen Drittheil, so ist das Product ein **Größtes**. Wenn die Zahl n heißt, so ist $(\frac{2}{3}n)^2 \times \frac{n}{3} = \frac{4n^2}{9} \times \frac{n}{3} = \frac{4n^3}{27}$ dies Größte.

§. 354.

VII. **Aufgabe.** In ein rechtwinkeliges Dreyeck ein Rechteck zu beschreiben, welches ein Größtes ist, so daß dieses Rechteck den rechten Winkel des Dreyecks gemein habe.

Auflösung. Wenn ABC (*Fig.* 70.) das gegebene rechtwinkelige Dreyeck ist, so nenne man AB $=$ a, BC $=$ b, und BD, die zu suchende Seite des Rechtecks, $=$ x. Da hier CB : BA $=$ CD : DE ist, so hat man b : a $=$ $b - x : DE = \frac{ab - ax}{b}$. Folglich ist der Inhalt des Rechtecks BDEF $= BD \times DE = \frac{abx - ax^2}{b}$. Daher denn $\frac{abx - ax^2}{b} = M$, und $abdx - 2axdx = 0$, wodurch $\frac{ab}{2a} = x = \frac{b}{2}$ wird. Um daher das größte Rechteck zu finden, muß die Seite BC in D halbirt, hier ein Loth DE errichtet, und durch E die EF mit CB gleichlaufend gezogen werden. Da diese EF auch die AB in F halbiret, so könnte man auch die Construction des zu findenden Rechtecks durch Halbirung der Cathete AB anfangen.

§. 355.

Zusatz. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ist folgende. Man nenne CD $= x$, so ist BD $=$ FE $= b - x$. Allein CB : BA $=$ CD : DE, oder $b : a = x : \frac{ax}{b} =$ DE; folglich $\triangle$ EDC $= \frac{ax}{b} \times \frac{x}{2} = \frac{ax^2}{2b}$. Da nun AF $= a - \frac{ax}{b} = \frac{ab - ax}{b}$, so wird $\triangle$ AFE $= \frac{ab - ax}{b} \times \frac{b - x}{2} = \frac{ab^2 - abx - abx + ax^2}{2b}$. Da nun Rechteck BDEF $= \triangle$ ABC $-$ ($\triangle$ EDC $+ \triangle$ AFE), so ist $\frac{ab}{2} - \frac{ax^2}{2b} - \frac{ab^2 + 2abx - ax^2}{2b} = M$, folglich $\frac{ab^2 - ax^2 - ab^2 + 2abx - ax^2}{2b} = M$, und $- 2axdx + 2abdx - 2axdx = 0$, oder $2abdx = 4axdx$, folglich $2ab = 4ax$, und $\frac{2ab}{4a} = \frac{b}{2} = x$, wie vorhin (§. 354.)

§. 356.

Zusatz. Soll in ein gegebenes rechtwinkeliges Dreyeck BAC (Fig. 71.) das größte Rechteck über die Hypotenuse BC beschrieben werden, so fälle man vom Scheitel des rechten Winkels A ein Loth AD auf die Hypotenuse BC, halbire DC in E, DB in G, errichte die Lothe EF und GH, und ziehe die Verbindungslinie HF; so ist GEFH ein Rechteck. Denn wegen EF : DA $=$ CE : CD ist EF $= \frac{1}{2}$ DA, und wegen GH : DA $=$ BG : BD ist GH $= \frac{1}{2}$ DA; folglich ist auch EF $=$ GH. Auch muß GEFH das größte Rechteck seyn. Denn GDLH ist das größte Rechteck im Dreyecke

BDA, und DEFL jenes im Dreyecke CDA' (§. 354.); folglich muß ihre Summe, die, wie leicht zu zeigen ist, ein Rechteck GEFH bildet, das größte Rechteck im Dreyecke BAC seyn.

§. 357.

Anmerkung. Die Auflösung des vorigen §. bleibt dieselbe, wenn auch der Winkel BAC (Fig. 71.) ein stumpfer oder ein spitzer ist.

§. 358.

VIII. Aufgabe. In eine gegebene Kugel das größte Parallelepipedum von quadratischer Grundfläche zu construiren.

Auflösung. Es sey EABF (Fig. 72.) die quadratische Grundfläche des zu construirenden Parallelepipedums, und AKBFHEA der Kreis, welcher durch allseitige Verlängerung dieser Grundfläche, als Durchschnittsfläche der Kugel, entstehet. Denket man sich nun vom gemeinschaftlichen Mittelpuncte ein Loth auf die Ebene ABFE errichtet, so muß dies durch der Kugel Mittelpunct, der G seyn soll, gehen. Dies Loth GC heisse x, und der aus dem Mittelpuncte der Kugel nach A gezogene Halbmesser GA sey r. Hier ist nun $AC^2 = GA^2 - GC^2 = r^2 - x^2$. Da aber $2AC^2 = ABFE$ (wie leicht zu erweisen ist, wenn CB gezogen wird), so hat man $ABFE = 2r^2 - 2x^2$. Da nun die ganze Höhe des über ABFE stehenden Körpers $= 2x$, so wird dessen Inhalt

$$(2r^2 - 2x^2)\, 2x = M, \text{ oder}$$
$$4r^2x - 4x^3 = M, \text{ folglich}$$
$$4r^2dx - 12x^2dx = o, \text{ und}$$
$$4r^2dx = 12x^2dx, \text{ woraus}$$
$$\frac{4r^2}{12} = \frac{r^2}{3} = x^2 \text{ wird.}$$

Um nun auch die Seite AB zu finden, setze man in der Gleichung $ABFE = 2r^2 - 2x^2$ für x^2 den eben gefundenen Werth, so wird $ABFE = 2r^2 - \frac{2r^2}{3} = \frac{4r^2}{3}$. Folglich ist $AB = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = 2\sqrt{\frac{r^2}{3}}$. Da aber $x = \sqrt{\frac{r^2}{3}}$, und $2x = 2\sqrt{\frac{r^2}{3}} = AB = AE$; so sind die drey Dimensionen des zu findenden Körpers gleich, d. h. er ist ein Würfel.

§. 359.

IX. Aufgabe. Das größte Parallelepipedum von quadratischer Grundfläche zu bestimmen, welches in einen gegebenen senkrechten Kegel construirt werden kann.

Auflösung. Es sey BAC (Fig. 73.) des gegebenen Kegels, und GHFE des hineinbeschriebenen größten Parallelepipedums senkrechter Durchschnitt. Man setze $DB = a$, $AD = b$, $AL = x$; so ist $LD = b - x$. Da nun $AD : DB = AL : LG$, so ist $b : a = x : \frac{ax}{b} = LG$, folglich $GH = EF = \frac{2ax}{b}$, und der quadratischen Grundfläche Inhalt $= \frac{4a^2x^2}{b^2}$. Weil ferner $LD = b - x$, so ist der Körperinhalt des Parallelepipedums $= \frac{4a^2x^2}{b^2} \times (b - x) = \frac{4a^2bx^2 - 4a^2x^3}{b^2} = M$. Folglich $8\,a^2bxdx = 12\,a^2x^2dx$, und $\frac{8a^2b}{12a^2} = \frac{x^2}{x}$, oder $\frac{2}{3}\,b = x$. Da-

her ist LD = $\frac{1}{3}$ AD, und der gesuchte Körper kann hiernach leicht construirt werden.

§. 360.

Zusatz. Setzt man alles, wie vorhin, nur LD = x; so ist nun AL = b — x, und man hat b : a = b — x : $\frac{ab - ax}{b}$ = LG. Daher $\frac{2ab - 2ax}{b}$ = GH, und

$GH^2 = EF^2 = \left(\frac{2ab - 2ax}{b}\right)^2 =$

$\frac{4a^2b^2 - 8a^2bx + 4a^2x^2}{b^2}$. Daher wird der Inhalt des zu findenden Körpers =

$\frac{4a^2b^2 - 8a^2bx + 4a^2x^2}{b^2} \times x =$

$\frac{4a^2b^2x - 8a^2bx^2 + 4a^2x^3}{b^2} = M$. Also

$4a^2b^2dx - 16a^2bxdx + 12a^2x^2dx = 0,$

$4a^2b^2dx + 12a^2x^2dx = 16a^2bxdx,$

$b^2 + 3x^2 = 4bx,$

$3x^2 - 4bx = - b^2,$

$x^2 - \frac{4bx}{3} = - \frac{b^2}{3},$

$x^2 - \frac{4bx}{3} + \frac{4b^2}{9} = \frac{4b^2}{9} - \frac{b^2}{3} = \frac{b^2}{9},$

$x - \frac{2b}{3} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{9}} = \pm \frac{b}{3},$

$x = \frac{2b}{3} \pm \frac{b}{3}$, d. h. x = b, oder x = $\frac{1}{3}$b. Da nun der erste Werth hier unbrauchbar wird, so ist x = $\frac{1}{3}$b, d. h. LD = $\frac{1}{3}$ AD, wie vorhin (§. 359.).

§. 361.

X. Aufgabe. Von allen Kegeln, welche innerhalb einer gegebenen Kugel beschrieben werden, denjenigen zu bestimmen, der die größte Seitenfläche hat.

Auflösung. Es sey der größte Kreis der gegebenen Kugel ABED (Fig. 74.), ihr Durchmesser AE $= a$, die Höhe des hineinzubeschreibenden Kegels AH $= x$; so ist HE $= a - x$, und wegen AH : HD $=$ HD : HE, wird HD $= \sqrt{(a - x) x} = \sqrt{(ax - x^2)}$. Nennt man nun π die Ludolphische Zahl; so ist $\pi \sqrt{(ax - x^2)}$ die halbe Peripherie des Kreises um HD. Da nun AD $= \sqrt{(AH^2 + HD^2)} = \sqrt{(x^2 + ax - x^2)} = \sqrt{ax}$; so wird die Seitenfläche des Kegels $= \pi \sqrt{(ax - x^2)} \times \sqrt{ax} = \pi \sqrt{(a^2x^2 - ax^3)} = M$. Daher ist $\pi^2 (a^2x^2 - ax^3) = M^2$, oder $\pi^2a^2x^2 - \pi^2ax^3 = M^2$, daher denn $\pi^2 2a^2xdx = \pi^2 3ax^2dx$. Folglich $\frac{2a^2}{3a} = \frac{x^2}{x}$, oder $\frac{2}{3} a = x$. Nimmt man also AH $= \frac{2}{3}$ AE, und construirt den Kegel ABD; so hat dieser die größte Seitenfläche unter allen andern in die Kugel zu beschreibenden.

§. 362.

XI. Aufgabe. Den größten Kegel zu finden, welcher in eine gegebene Kugel beschrieben werden kann.

Auflösung. Es sey Alles, wie vorhin, so ist (Fig. 74.) die Grundfläche um HD $= \pi HD^2 = \pi (ax - x^2) = \pi ax - \pi x^2$. Diese Fläche mit $\frac{1}{3}$ AH $= \frac{1}{3} x$ multipliciret, giebt des Kegels Inhalt $= \frac{\pi ax^2 - \pi x^3}{3} = M$.

Daher ist $2\pi a x dx = 3\pi x^2 dx$, und $\frac{2a}{3} = \frac{x^2}{x}$, oder $\frac{2}{3} a = x$ wie zuvor.

§. 363.

XII. Aufgabe. Es ist eine Kugel gegeben. Man soll den hinein zu beschreibenden Cylinder finden, der die größte Seitenfläche hat.

Auflösung. Es sey C (Fig. 75.) der Mittelpunct der gegebenen Kugel, ABDE ihr größter Kreis, und FHKG der senkrechte Durchschnitt des zu findenden Cylinders. Man nenne $CA = CD = a$, $CQ = CN = x$; so ist $QK^2 = CK^2 - CQ^2 = a^2 - x^2$, und $QK = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; folglich die Peripherie um $QK = 2\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}$, und die krumme Fläche des Cylinders $= 2\pi \sqrt{(a^2 - x^2)} \times 2x = 4\pi x \sqrt{(a^2 - x^2)} = 4\pi \sqrt{(a^2x^2 - x^4)} = M$. Daher $16\pi^2 (a^2x^2 - x^4) = M^2$, oder $16\pi^2 a^2 x^2 - 16\pi^2 x^4 = M^2$, folglich $32\pi^2 a^2 x dx = 64\pi^2 x^3 dx$, und endlich $\frac{a^2}{2} = x^2$, oder $\frac{a}{\sqrt{2}} = x$.

Um diesen Werth von x geometrisch zu construiren, beschreibe man über *CA* den Halbkreis *CPA*, und in denselben das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreyeck *CPA*; so ist $CP = AP = x$, und wenn man $CQ = CN = CP$ macht, so sind die Puncte *Q* und *N* bestimmt, und folglich auch der in die Kugel zu beschreibende Körper.

§. 364.

Zusatz. Weil $AQ : QK = QK : QD$, so ist $QK^2 = AQ \times QD$. Allein $AQ = AC + CQ = a + x$, und $QD = CD - CQ = a - x$; folglich $QK^2 = (a + x) . (a - x) = a^2 - x^2$, wie vorhin (in

§. 363). Nun war aber $x^2 = \frac{a^2}{2}$, folglich ist $KQ^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$, daher auch $QK^2 = x^2$, d. h. $QK = CQ$, folglich $HK = NQ = FH$, und $FGKH$ ein Quadrat. Daher wird die Höhe des in die Kugel beschriebenen Cylinders von der größten Seitenfläche dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich seyn.

§. 365.

XIII. Aufgabe. In eine Kugel einen Cylinder zu beschreiben, welcher den größten Körperinhalt hat.

Auflösung. Es sey Alles, wie in der vorigen Aufgabe (§. 363.), so ist die Grundfläche des zu findenden Cylinders $= \pi QK^2 = \pi\,(a^2 - x^2)$, folglich sein Körperinhalt $= 2\pi x\,(a^2 - x^2) = 2\pi a^2 x - 2\pi x^3 = M$. Folglich hat man $2\pi a^2 dx = 6\pi x^2 dx$, und $\frac{2a^2}{6} = x^2$, d. h. $\frac{1}{3} a^2 = x^2$, oder $\frac{1}{3} CD^2 = CQ^2$.

§. 366.

Zusatz. Aus $\frac{1}{3} a^2 = x^2$ folget $\frac{1}{3} a : x = x : a$, oder $\frac{1}{3} CD : x = x : CD$, wodurch der Werth von x sehr leicht geometrisch construirt werden kann.

§. 367.

XIV. Aufgabe. In eine gegebene Kugel die größte viereckige Pyramide von quadratischer Grundfläche zu construiren, deren Spitze sich in der Kugel Mittelpunct befindet.

Auflösung. Es sey $EFDAC$ (*Fig.* 76.) die zu fin-

dende Pyramide, C der Mittelpunct der Kugel, $CA = a$ ihr Halbmesser, $CB = x$ das Loth aus C auf $EFDA$; so ist $AB^2 = a^2 - x^2$, folglich auch $2AB^2 = EFDA = 2a^2 - 2x^2$, und der Pyramide Inhalt $= EFDA \times \frac{1}{3} CB = (2a^2 - 2x^2) \times \frac{x}{3} = \frac{2a^2x - 2x^3}{3} = M$. Daher denn $2a^2dx = 6x^2dx$, und $\frac{1}{3} a^2 = x^2$, worin der Werth von x durch die Proportion $\frac{a}{3} : x = x : a$ leicht construirt werden kann.

3. Arithmetische Aufgaben vom Größten.

§. 368.

I. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwey Theile zu theilen, aus deren Multiplication das größte Product entstehet.

Auflösung. Die gegebene Zahl sey $= a$, der eine zu findende Theil x; so ist der andere $a - x$, folglich das größte Product $x(a - x) = M$. Daher auch $ax - x^2 = M$, und

$$adx = 2xdx, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{2} = x.$$

Daher ist nun der andere Theil von a, oder $a - x = \frac{a}{2}$.

Erläuterung. Die Zahl sey 24, so ist $12 \times 12 = 144$ das größte Product ihrer Theile. Wirklich ist auch $144 > 13 \times 11 > 14 \times 10 > 15 \times 9 > 16 \times 8$

$> 17 \times 7 > 18 \times 6 > 19 \times 5 > 20 \times 4 > 21 \times 3 > 22 \times 2 > 23 \times 1.$

Wäre 17 so zu theilen, so würde $\frac{17}{2} \times \frac{17}{2} = \frac{289}{4} = 72\frac{1}{4}$ das größte Product. Für $\frac{7}{9}$ ist $\frac{7}{18} \times \frac{7}{18}$ das größte Product u. s. w.

§. 369.

Zusatz. Da eben diese Aufgabe für jede Größe, folglich auch für jede zu theilende gerade Linie, gilt, so ist das größte Product ihrer Segmente ein Quadrat. Alle andere Rechtecke sind kleiner als dieses Quadrat.

§. 370.

II. Aufgabe. Eine willkührliche Zahl a in drey Theile B, C, D zu theilen, so daß

1.) $B : C = 1 : 2$, und

2.) $B^2CD + C^2BD + D^2BC$ ein Größtes ist.

Auflösung. Der erste Theil der Zahl sey x; so ist der zweyte $= 2x$, und der dritte $= a - 3x$; folglich wird $B = x$, $C = 2x$, und $D = a - 3x$; und $B^2CD = x^2.2x.(a - 3x) = 2ax^3 - 6x^4$, $C^2BD = 4x^2.x.(a - 3x) = 4ax^3 - 12x^4$, und $D^2BC = (a^2 - 6ax + 9x^2) . 2x^2 = 2a^2x^2 - 12ax^3 + 18x^4$. Daher ist

$$2ax^3 - 6x^4 + 4ax^3 - 12x^4 + 2a^2x^2 - 12ax^3 + 18x^4 = M,$$ oder $2a^2x^2 - 6ax^3 = M$. Mithin wird

$$4a^2xdx = 18ax^2dx, \text{ folglich}$$

$$\frac{4a^2}{18a} = \frac{x^2}{x}, \text{ d. h. } \frac{2a}{9} = x.$$

Erläuterung. Es sey $a = 18$; so ist $x = \frac{2}{9} \times 18 = 4$, also $2x = 8$, und $a - 3x = 6$, und das Maximum wird

$$16 \times 48 + 64 \times 24 + 36 \times 32 =$$
$$768 + 1536 + 1152 = 3456.$$

Man setze z. B. $x = 5$; so wird $2x = 10$, und $a - 3x = 3$; folglich $25 \times 30 + 100 \times 15 + 9 \times 50 = 750 + 1500 + 450 = 2700 < 3456$, und sofort in allen andern Fällen.

§. 371.

III. Aufgabe. Die gegebene Zahl a dergestalt in zwey Theile zu theilen, daß die Potenz vom Grade m des ersten Theils mit der Potenz vom Grade n des zweyten Theils multiplicirt, das größte Product giebt.

Auflösung. Es sey der erste Theil $= x$; so ist der andere $= a - x$, und man hat nach der Bedingniß der Aufgabe $x^m . (a - x)^n = M$. Um dieses Product zu differentiiren, setze man $x^m = y$, und $(a - x)^n = z$, so wird nach (§. 290.)

$$d\left(x^m . (a - x)^n\right) = zdy + ydz =$$

$$(a - x)^n . dx^m + x^m . d(a - x)^n =$$

$$(a - x)^n . mx^{m-1} dx + x^m d(a - x)^n =$$

$$mx^{m-1} dx (a - x)^n + x^m d(a - x)^n \quad (A)$$

Um nun dieses Differential von $(a - x)^n$ zu finden, setze man $a - x = v$; so wird

$(a - x)^n = v^n$, und $d(a - x)^n = dv^n = nv^{n-1} dv$. Substituirt man in dieser letzten Gleichung den Werth von v, so ist

$$d(a - x)^n = n(a - x)^{n-1} d(a - x) =$$

$- n(a - x)^{n-1} dx$. Dies Differential in die obere Gleichung (A) gesetzt, giebt

$$mx^{m-1} dx (a - x)^n - nx^m (a - x)^{n-1} dx = o; \text{ also}$$

$$mx^{m-1} . (a - x)^n = nx^m . (a - x)^{n-1} .$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit x^{m-1}, so wird

$$m(a - x)^n = nx(a - x)^{n-1} .$$

Alles nun mit $(a - x)^{n-1}$ dividirt, giebt $m(a - x) = nx$, oder $am - mx = nx$, oder $am = (m + n)x$, und

$$x = \frac{am}{m + n}.$$

§. 372.

Zusatz. Aus $x = \frac{am}{m + n}$ folget die Proportion $m + n : m = a : x$, woraus nachstehende allgemeine Regel zur Auflösung der Aufgabe entspringt:

Die Summe der Exponenten beyder zu findenden Theile verhält sich zum Exponenten

des ersten Theils, wie die zu theilende Zahl sich zu dem zu findenden ersten Theile verhält. Die gegebene Zahl a wird daher immer nach dem Verhältnisse der Exponenten m und n eingetheilt. Setzt man den zweyten Theil = y, so wird $y = a - x = a - \frac{am}{m + n} = \frac{am + an - am}{m + n} = \frac{an}{m + n}$. Die Zahl a wird demnach hier so getheilt, wie dies bey der gewöhnlichen gesellschaftlichen Theilrechnung der Fall ist.

§. 373.

Zusatz. Erläuterung. Für m = 2, n = 3, wird $x = \frac{2}{5}$ a und $y = \frac{3}{5}$ a; für m = 3 und n = 4 ist $x = \frac{3}{7}$ a, $y = \frac{4}{7}$ a; für m = 4 und n = 5 erhält man $x = \frac{4}{9}$ a und $y = \frac{5}{9}$ a; für m = 8 und n = 11 wäre $x = \frac{8}{19}$ a und $y = \frac{11}{19}$ a u. s. w. Beyspiele in Zahlen zur practischen Probe sind sehr leicht zu rechnen.

§. 374.

Anmerkung. Eine frühere Aufgabe (in §. 350.) ist nur ein besonderer Fall von dem hier bewiesenen allgemeinen. Denn wenn eine Zahl a dergestalt in zwey Theile zertheilt werden soll, daß das Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten ein Größtes wird, so ist dieser erste Theil $x = \frac{am}{m + n} = \frac{2}{3}$ a, und es ist $\frac{4}{9} a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a^3}{27}$ das größte Product, wie oben (im angeführten §.).

4. Geometrische Aufgaben vom Kleinsten.

§. 375.

I. Aufgabe. Eine gerade Linie, und zwey ausser ihr auf einerley Seite derselben befindliche Puncte sind gegeben. Man soll den Ort in der geraden Linie bestimmen, der die Eigenschaft hat, daß die Summe der aus ihm nach den gegebenen Puncten gezogenen geraden Linien ein Kleinstes sey.

Auflösung. Es sey *HK* (*Fig.* 77.) die gegebene gerade Linie, *A* und *B* seyen die beyden Puncte ausser ihr. Man soll *C* finden, so daß $AC + CB$ ein Kleinstes ist. Man ziehe aus *A* und *B* auf *HK* die Lothe *AE* und *BD*, setze $ED = a$, $AE = b$, $BD = c$, $EC = x$; so ist $CD = a - x$. Ferner sey $AC = y$, und $BC = z$; so wird $y^2 = b^2 + x^2$, und $z^2 = c^2 + (a - x)^2$. Folglich $2ydy = 2xdx$, und $dy = \frac{2xdx}{2y}$. Desgleichen $2zdz = d\,(a^2 - 2ax + x^2) = 2xdx - 2adx$, folglich $dz = \frac{2xdx - 2adx}{2z}$.

Da nun $y + z = m$ (welcher Buchstabe von nun an das Kleinste bedeuten soll), so ist auch $dy + dz = 0$. Substituirt man nun die für dy und dz gefundenen Werthe, so wird

$$\frac{2xdx}{2y} + \frac{2xdx - 2adx}{2z} = 0; \text{ folglich}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{x - a}{z} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a - x}{z}, \text{ woraus die Proportion}$$

$y : x = z : a - x$, oder

$AC : EC = BC : CD$ folget. Da nun $CE = \text{cosin. } o$ für den Halbmesser *CA*, und $CD = \text{cosin. } u$ für den

Halbmesser *CB*; so muß der Punct *C* so gewählt seyn, daß o = u.

Dieses wird leicht erhalten, wenn man *BD* verlängert, bis *DL* = *DB*, und sodann die gerade *AL* ziehet, welche den Punct *C* in *HK* bestimmt. Denn △ *CDB* ≅ △ *CDL*, folglich u = r; allein r = o (als Scheitelw.), folglich auch = o, und die Aufgabe ist aufgelößt.

§. 376.

Zusatz. Da △ *ACE* ∽ △ *BCD*, so ist auch b : x = c : a — x; folglich ab — bx = cx, und ab = (c + b) x; daher $x = \frac{ab}{b + c}$, und auch b + c : a = b : x, d. h. die Linie a wird nach Verhältniß der Lothe b und c eingetheilt, und durch diese Verhältnißtheilung sodann der Punct *C* bestimmt.

§. 377.

II. Aufgabe. Unter allen möglichen Dreyecken, welche Grundlinie und Höhe gemein haben, dasjenige zu bestimmen, welches den kleinsten Umfang hat

Auflösung. Es sey *AB* (*Fig.* 78.) die Grundlinie des zu findenden Dreyecks, und die mit *AB* parallele *CD* bestimme dessen Höhe. Soll nun über *AB* das Dreyeck vom kleinsten Umfange construirt werden, so kömmt es darauf an, in *CD* einen Punct *E* zu finden, wodurch *AE* + *EB* ein Kleinstes wird. Hieraus ersieht man, daß diese Aufgabe auf die vorige zurücke führet. Da hier die Lothe *AF* und *BG* gleich sind, so muß auch die gerade *FG* (nach §. 376.) gleichgetheilt, d. h. halbiret werden. Man nehme daher *EF*

$= EG$, und ziehe AE und BE; so ist AEB das zu findende Dreyeck. Da nun $AE = BE$, so entspricht nur das gleichschenkelige Dreyeck der Foderung der Aufgabe.

§. 378.

III. Aufgabe. Der Inhalt eines Würfels ist bekannt. Man soll ein ihm gleiches Parallelepipedum, dessen eine Seite gegeben ist, finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Des Würfels Inhalt sey $= a^3$, des Parallelepipedums gegebene Seite $= b$, die andere $= x$; so ist dessen dritte Seite $= \frac{a^3}{bx}$. Wenn (*Fig.* 79.) AH der zu findende Körper ist; so sey $GC = b$, $GE = x$, und $GH = \frac{a^3}{bx}$. Hier wird nun $CDHG = \frac{a^3 b}{bx} = \frac{a^3}{x}$, $CAEG = bx$, und $GEFH = \frac{xa^3}{bx} = \frac{a^3}{b}$.

Folglich ist die gesammte Oberfläche dieses Körpers, oder

$\frac{2a^3}{x} + 2bx + \frac{2a^3}{b} = m$; folglich

$2bdx + d\left(\frac{2a^3}{x}\right) = 0$. Allein

$d\left(\frac{2a^3}{x}\right) = \frac{xd2a^3 - 2a^3 dx}{x^2}$ (§. 297.) $= - \frac{2a^3 dx}{x^2}$, daher ist $2bdx - \frac{2a^3 dx}{x^2} = 0$, und $bx^2 = a^3$; folglich

$x^2 = \frac{a^3}{b}$, und $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Hieraus findet sich nun die dritte Seite, oder $\frac{a^3}{bx} =$

$\frac{a^3}{b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a^3}} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Folglich ist *GE* = *GH*, und die Grundfläche des zu findenden Parallelepipedums ein Quadrat, dessen Seite $= \sqrt{\frac{a^3}{b}}$ ist.

Erläuterung. Für $a^3 = 64$, $b = 16$, wird $d = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$. Folglich die ganze Oberfläche $= 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 16 \times 2 + 2 \times 16 \times 2 = 8 + 2 \times 64 = 8 + 128 = 136$.

§. 379.

IV. Aufgabe. Ein Parallelepipedum zu construiren, welches, bey gegebenem Inhalte $= a^3$, die kleinste Umfangsfläche hat.

Auflösung. Wenn man den Inhalt dieses Körpers $= k$, seine Höhe $= x$ setzt; so wird jede Seite der Grundfläche $= \sqrt{\frac{k}{x}}$ (nach der vor. Aufgabe). Folglich ist dessen Grundfläche $= \sqrt{\frac{k}{x}} \times \sqrt{\frac{k}{x}} = \frac{k}{x}$, und eine Seitenfläche $= \sqrt{\frac{k}{x}} \times x = \sqrt{\frac{kx^2}{x}} = \sqrt{kx}$; demnach wird die halbe Oberfläche des Körpers $= \frac{k}{x} + 2\sqrt{kx} = m$.

Nun ist aber $d\frac{k}{x} = -\frac{kdx}{x^2}$ (§. 297.) und $d(2\sqrt{kx}) = d\sqrt{4kx} = d(4kx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4kx)^{-\frac{1}{2}} \times 4kdx$ (§. 296.) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{4kx}} \times 4kdx = \frac{1}{2} \times \frac{4kdx}{\sqrt{4kx}} = \frac{4kdx}{2\sqrt{4kx}} = \frac{4kdx}{2.2\sqrt{kx}} = \frac{kdx}{\sqrt{kx}}$. Daher ist

denn $-\frac{kdx}{x^2} + \frac{kdx}{\sqrt{kx}} = 0$, folglich $\frac{k}{\sqrt{kx}} = \frac{k}{x^2}$, oder $x^2 = \sqrt{kx}$, oder $x^4 = kx$, und $x^3 = k$. Allein $k = a^3$, da k dem gegebenen Würfel a^3 gleich seyn soll. Folglich ist $x = a$, und der verlangte Körper ein Würfel, dessen Seite $= a$.

§. 380.

V. Aufgabe. Einen Cylinder zu construiren, welcher, bey gegebenem Inhalte, die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Des zu findenden Cylinders Inhalt sey k, der Durchmesser seiner Grundfläche $= x$, die Ludolphische Zahl $= \pi$; so ist der Umfang der Grundfläche $= \pi x$, ihr Inhalt $= \pi x \times \frac{x}{4} = \frac{\pi x^2}{4}$, und des Cylinders Höhe $=$

$\frac{k}{\frac{\pi x^2}{4}} = \frac{4k}{\pi x^2}$. Daher wird seine krumme Seitenfläche $=$

$\frac{\pi x \times 4k}{\pi x^2} = \frac{4k}{x}$. Die Summe beyder Grundflächen ist aber

$= \frac{2\pi x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{2}$. Folglich wird seine ganze Umfangsfläche $=$

$$\frac{\pi x^2}{2} + \frac{4k}{x} = m.$$

Dieses differentiirt, giebt $\pi x dx - \frac{4kdx}{x^2}$ (§. 296 u. 297)

$= 0$; folglich $\pi x = \frac{4k}{x^2}$, und $\pi x^3 = 4k$; daher

$x^3 = \frac{4k}{\pi}$, und $x = \sqrt[3]{\frac{4k}{\pi}}$. Setzt man nun $k = a^3$, so wird $x = \sqrt[3]{\frac{4a^3}{\pi}} = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

Nun war des Cylinders Höhe $= \frac{4k}{\pi x^2} = \frac{4a^3}{\pi x^2}$. Folglich wird diese $= \frac{4a^3}{a\pi\sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2}}} = \frac{4a}{\pi\sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2}}} = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$; denn $\pi\sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2}} \times a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = a\pi\sqrt[3]{\frac{64}{\pi^3}} = \frac{a\pi 4}{\pi} = 4a$. Hieraus folget, daß jener Cylinder von gegebenem Inhalte den kleinsten Umfang habe, dessen Höhe und Durchmesser gleich sind. Jede dieser Linien ist $= a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. Den beständigen Factor dieses Productes $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ kann man auf mehrere Decimalstellen berechnen, und so mit der gegebenen Größe a multipliciren, um das Unbekannte zu finden.

5. Arithmetische Aufgaben vom Kleinsten.

§. 381.

I. Aufgabe. Eine Zahl a dergestalt zu theilen, daß die Summe ihrer Quadrate ein Kleinstes werde.

Auflösung. Der eine Theil sey x, so ist der andere $= a - x$, und man hat

$$(a - x)^2 + x^2 = m, \text{ oder}$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + x^2 = m, \text{ oder}$$
$$2x^2 - 2ax + a^2 = m. \text{ Daher}$$

$$4x dx - 2a dx = 0, \text{ und}$$
$$4x = 2a; \text{ folglich } x = \tfrac{1}{2} a.$$

Daher muß die gegebene Zahl halbirt werden, und ihre zwey Hälften sind die beyden zu findenden Theile.

Erläuterung. Es sey 6 die zu theilende Zahl, so ist $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$. Die Summen der Quadrate dieser Theile sind $25 + 1$, $16 + 4$, $9 + 9$, d. h. 26, 20, 18, worunter die letzte die kleinste ist.

§. 382.

II. Aufgabe. Man soll drey Zahlen, A, B und C finden, so daß

1) $A . B . C = a$,
2) $A : B = 2 : 3$, und
3) $AB + BC + AC$ ein Kleinstes wird.

Auflösung. Es sey $A = 2x$, $B = 3x$, und $C = y$; so ist $A . B . C = 2x . 3x . y = 6x^2y = a$; folglich $12 yx dx + 6x^2 dy = 0$, und $\frac{12 yx dx}{6x^2} = - dy = \frac{2y dx}{x}$. Ferner wird $A . B = 2x . 3x = 6x^2$, $B . C = 3xy$, und $A . C = 2xy$; daher $A . B + B . C + A . C = 6x^2 + 3xy + 2xy$, oder $6x^2 + 5xy = m$. Hieraus wird $12 x dx + 5 x dy + 5 y dx = 0$, oder $\frac{12x dx + 5y dx}{5x} = - dy = \frac{2y dx}{x}$; folglich $12x + 5y = \frac{10xy}{x} = 10y$, oder $12x = 10y - 5y = 5y$, d. h. $x = \frac{5}{12} y$, und $x^2 = \frac{25}{144} y^2$. Da nun $6x^2y = a$,

so wird $\frac{6 \times 25}{144} y^3 = a$, und $y = \sqrt[3]{\frac{144}{150} a}$. Daher sind alle Theile von a bestimmt.

Erläuterung. Es sey $a = 1800$; so wird $y = \sqrt[3]{\frac{144 \times 1800}{150}} = 12$, $x = \frac{5}{12} \times 12 = 5$; folglich $2x = 10$, und $3x = 15$. Hier ist nun

1) $10 \times 15 \times 12 = 1800$,

2) $10 : 15 = 2 : 3$, und

3) $150 + 180 + 120 = 450$ ein Kleinstes.

Setzte man nun z. B. $A = 2$, $B = 3$, $C = 300$; so wäre zwar

1) $2 \times 3 \times 300 = 1800$,

2) $2 : 3 = 2 : 3$; allein

3) $6 + 900 + 600 = 1506$ ein weit größeres Product, als das vorige.

§. 383.

III. Aufgabe. Eine Zahl a ist in zwey Theile A und B getheilt, so daß

1) $A : B = 1 : 15$, und

2) $A^3 + B^2 = m$.

Man soll a, und A und B finden.

Auflösung. Nach diesen Bedingnissen ist, wenn $A = x$, $B = y$ heißt;

I) $x + y = a$; folglich $dx + dy = 0$, und $dx = - dy$; ferner

II) $x^3 + y^2 = m$; daher $3x^2dx + 2ydy = 0$, und $\frac{3x^2dx}{2y} = - dy$. Setzt man diese zwey Werthe von

$-dy$ einander gleich, so ist $dx = \frac{3x^2dx}{2y}$; folglich $2y = 3x^2$, und $y = \frac{3}{2}x^2$.

Da nun $x : y = 1 : 15$, so ist auch $y = 15x$, und man hat, durch Gleichsetzung beyder Werthe von y, die Gleichung $\frac{3x^2}{2} = 15x$; folglich $3x^2 = 30x$, oder $3x = 30$, und $x = 10 = A$. Daher wird $y = 10 \times 15 = 150 = B$.

Erläuterung. Hier ist nun

1) $x : y = A : B = 10 : 150 = 1 : 15$, und

2) $A^3 + B^2 = 1000 + 22500 = 23500$ ein Kleinstes.

Auch ist $a = x + y = 160$.

§. 384.

IV. Aufgabe. Man soll die Zahl 63 in drey Theile A, B und C theilen, so daß

1) $A < B$, und $B < C$;

2) $C = 9B$, und

3) $A^4 + B^3 + C^2 = m$ ist.

Auflösung. Es sey $A = x$, $B = y$, $C = z$; so ist, wenn $63 = a$ heißt,

I) $x + y + z = a$;

II) $x^4 + y^3 + z^2 = m$. Man nehme zuerst x als beständig an; so wird aus I) $dy + dz = 0$, folglich $dz = -dy$. Aus II) bekömmt man $3y^2dy + 2zdz = 0$, folglich auch $dz = -\frac{3y^2dy}{2z}$. Daher denn auch $dy = \frac{3y^2dy}{2z}$, oder $2z = 3y^2$, und $z = \frac{3}{2}y^2$.

Nun sey y beständig, x und z aber veränderlich; so wird aus I) $dx + dz = 0$, folglich $dz = - dx$. Aus II) findet man nun $4x^3dx + 2zdz = 0$, folglich auch $dz = - \frac{2x^3dx}{z}$. Diese Werthe von dz gleich gesetzt, giebt $dx = \frac{2x^3dx}{z}$; folglich $z = 2x^3$.

Weil nun $z = \frac{3}{2}y^2$ (nach oben) und auch $z = 9y$ (nach der Aufgabe); so ist $\frac{3}{2}y^2 = 9y$, und $\frac{3}{2}y = 9$; folglich $y = 6$. Daher bekömmt man $z = 6 \times 9 = 54$, und $x = 63 - (54 + 6) = 3$. Also ist $A = 3$, $B = 6$, $C = 54$; und man hat

1) $3 < 6$; $6 < 54$;
2) $54 = 9 \times 6$, und
3) $3^4 + 6^3 + 54^2 = 81 + 216 + 2916 = 3213 =$ dem Kleinsten.

Nimmt man z. B. $A = 13$, $B = 5$, $C = 45$; so ist $13^4 + 5^3 + 45^2 > 3213$, wobey nur die erste Bedingniß, die nicht wesentlich zur Aufgabe gehört, nicht Statt findet.

IV. Der binomische Lehrsatz.

§. 385.

Erklärung. Irgend zwey Größen, welche durch das Zeichen + oder — mit einander verbunden sind, werden ein Binomium (zweytheilige Größe oder Binomialgröße) genannt; z. B. $a + b$, $1 + a$, $ab + c$ u. s. w. Der Satz, durch dessen Anweisung jedes Binomium auf irgend eine beliebige, ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte, Potenz erhoben werden kann, heißt der binomische Lehrsatz (das Binomialtheorem.)

§. 386.

Aufgabe. Die ersten sechs positiven ganzen Potenzen des Binomiums $a + b$ zu finden.

Auflösung. Die gewöhnliche Rechnung giebt, wenn man $a + b$ einmal mit sich selbst, und das hieraus entspringende Product sodann immer wieder mit der Wurzel $a + b$ multipliciret, folgende leicht zu erhaltende Resultate:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

§. 387.

Aufgabe. In dem Ausdrucke $(a + b)^n$, worin n jede ganze positive Zahl bedeutet, zu bestimmen: 1) aus welchen Potenzen von a und b, und 2) aus wie vielen Gliedern derselbe bey seiner Entwickelung bestehen wird.

Auflösung. Aus $(a + b)^6$ wird $(a + b)^7$ erhalten, wenn man $(a + b)^6$ mit $a + b$ multiplicirt. Dies giebt aber (nach §. 386.) folgende Rechnung:

$(A)\quad a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ multiplicirt mit

$a + b$

$$\begin{array}{l} a^7 + 6a^6b + 15a^5b^2 + 20a^4b^3 + 15a^3b^4 + 6a^2b^5 + ab^6 \\ \qquad a^6b + 6a^5b^2 + 15a^4b^3 + 20a^3b^4 + 15a^2b^5 + 6ab^6 + b^7 \end{array}$$

aus deren Betrachtung hervorgehet:

1) daß jede um einen Grad höhere Potenz des Binomiums $(a + b)$ ein Glied mehr enthalte, als die unmittelbar vorhergehende;

2) daß der erste Theil a in der um einen Grad höhern Potenz selbst auf diesen nächsthöhern Grad steige, und daß jedes der folgenden Glieder dieser Potenz diesen Theil a in den stufenmäßig bis auf 0 abnehmenden Graden enthalte;

3) daß der zweyte Theil b in dem ersten Gliede der Potenz auf dem Grade 0 sich befinde, aber in jedem folgenden Gliede um einen Grad höher steige, bis er in dem letzten Gliede auf der Potenz des Binomiums steht.

4) Da sich nun eben diese Schlüsse von der siebenten Potenz auf die achte, von dieser auf die neunte u. s. f. anwenden lassen; so ergiebt sich im Allgemeinen daraus, daß $(a + b)^n$ die Potenzen a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, ... a^{n-n}, ferner die Potenzen b^{n-n}, $b^{n-(n-1)}$, $b^{n-(n-2)}$ ..... b^n der Reihe nach enthalten, und aus $n + 1$ Gliedern bestehen müsse.

§. 388.

Zusatz. Daher ist es leicht, für jede angegebene ganze, positive Potenz von (a + b) sämmtliche Potenzen von a und von b ihrer Größe, Verbindung und Ordnung nach anzugeben. Für $(a + b)^{10}$ ergiebt sich Folgendes:

a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}.

Oder allgemein für $(a + b)^n$ wäre: a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4 \ldots a^{n-n}b^n$.

§. 389.

Zusatz. Könnte man daher auch nach einem solchen allgemeinen Muster die Coefficienten für jede höhere Potenz des Binomiums finden, so wäre es sehr leicht, alle einzelne Glieder desselben vollständig darzustellen. Bezeichnet man diese Coefficienten mit den Buchstaben A, B, C, D, . . . so ist der allgemeine Ausdruck des Binomiums dieser:

$$(a + b)^n = a^n + Aa^{n-1}b + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-3}b^3 + Da^{n-4}b^4 \ldots + b^n.$$

§. 390.

Aufgabe. Die einzelnen Glieder von $(a + b)^7$ durch Hülfe der Differentialrechnung zu finden.

Auflösung. 1) Die Potenzen von a und b in $(a+b)^7$ findet man leicht (nach §. 387). Sie sind der Reihe nach folgende: a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.

2) Zur Bestimmung der Coefficienten durch die Differentialrechnung setze man den zweyten Theil des Binomiums $= x$ (eine veränderliche Größe), so ist

$$(a + x)^7 = a^7 + \mathit{A}a^6x + \mathit{B}a^5x^2 + Ca^4x^3 + \mathit{D}a^3x^4 + \mathit{E}a^2x + \mathit{F}ax^6 + x^7 \; (M).$$

Auf beyden Seiten differentiirt giebt $7(a + x)^6dx = 0 + \mathit{A}a^6dx + 2\mathit{B}a^5xdx + 3Ca^4x^2dx + 4\mathit{D}a^3x^3dx + 5\mathit{E}a^2x^4dx + 6\mathit{F}ax^5dx + 7x^6dx$, folglich $7(a+x)^6 = \mathit{A}a^6 + 2\mathit{B}a^5x + 3Ca^4x^2 + 4\mathit{D}a^3x^3$

$$+ 5\mathit{E}a^2x^4 + 6\mathit{F}ax^5 + 7x^6.$$

Beyderseits mit $a + x$ multiplicirt, giebt

$$7(a + x)^7 = Aa^7 + 2Ba^6x + 3Ca^5x^2 + 4Da^4x^3 + 5Ea^3x^4 + 6Fa^2x^5 + 7ax^6$$
$$Aa^6x + 2Ba^5x^2 + 3Ca^4x^3 + 4Da^3x^4 + 5Ea^2x^5 + 6Fax^6 + 7x^7 \; (N)$$

3) Multiplicirt man die Gleichung (M) (in 2) beyderseits mit 7, so wird

$$7(a + x)^7 = 7a^7 + 7Aa^6x + 7Ba^5x^2 + 7Ca^4x^3 + 7Da^3x^4 + 7Ea^2x^5 + 7Fax^6 + 7x^7.$$

Werden nun die in (N) (2) gefundenen Werthe von $7(a + x)^7$ den hier gefundenen Werthen einzeln gleichgesetzt, so erhält man Folgendes:

$Aa^7 = 7a^7$; folglich der erste Coefficient

$I)\; A = 7$. Ferner

$2Ba^6x + Aa^6x = 7Aa^6x$, oder

$2B = 7A - A$, d. h. $B = 3A$, folglich

$II)\; B = 21$; desgleichen ist

$3C + 2B = 7B$, oder

$3C = 5B = 5 \times 21 = 105$, folglich

$III)\; C = 35$. Eben so wird

$4D + 3C = 7C$, oder

$4D = 4C = 4 \times 35 = 140$, folglich

IV) $D = 35$. Ferner ist

$5E + 4D = 7D$, oder

$5E = 3D = 3 \times 35 = 105$, folglich

V) $E = 21$. Endlich wird noch

$6F + 5E = 7E$, oder

$6F = 2E = 2 \times 21 = 42$, folglich

VI) $F = 7$.

4.) Daher hat man vollständig: $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$. Eben dieses giebt die wirkliche Rechnung, wenn man $(a + b)^6$ (in §. 386.) mit $(a + b)$ multipliciret.

§. 391.

Aufgabe. Das Binomium $(1 + x)^n$ zu entwickeln.

Auflösung. 1) Weil hier alle höhere Potenzen von 1 selbst wieder 1 sind, so wird

$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots\ldots (X)$

2) Diese Gleichung (X) differentiirt, giebt

$n(1 + x)^{n-1} dx = dx\,(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 \ldots\ldots)$, folglich $n(1 + x)^{n-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 \ldots\ldots (Y)$.

3) Wird hier (Y) mit $(1 + x)$ multiplicirt, so ist

$$n(1 + x)^n = \begin{array}{l} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 \ldots \\ \quad\;\; Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 \ldots \end{array}$$

4) Multipliciret man nun auch die Gleichung (X) beyderseits mit n, so wird $n(1+x)^n = n + nAx + nBx^2 + nCx^3 + nDx^4 + nEx^5 \ldots$

5) Setzt man die einzelnen Glieder der für $n(1+x)^n$ gefundenen Werthe (in 3 und 4) einander gleich; so ergiebt sich jeder Coefficient.

Nämlich es ist

$I)\ A = n$; ferner

$2B + A = nA$, oder $2B = (n-1)A$, d. h.

$II)\ B = \frac{n(n-1)}{2}$; ferner

$3C + 2B = nB$, oder $3C = (n-2)B$, d. h.

$III)\ C = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}$; ferner

$4D + 3C = nC$, oder $4D = (n-3)C$, d. h.

$IV)\ D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}$; ferner

$5E + 4D = nD$, oder $5E = (n-4)D$, d. h.

$V)\ E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

Hieraus erhellet das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Coefficienten, so viel ihrer auch seyn mögen. Es würde nämlich

$$F = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.$$

Werden diese Coefficienten der Reihe nach mit den gehörigen Potenzen von x (in 1) verbunden, so ist die Aufgabe aufgelößt.

§. 392.

Zusatz. Aus dem Bisherigen (§. 389 und 391.) folget nunmehr allgemein, daß $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{n-4}b^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{n-5}b^5 + \ldots$$

§. 393.

Zusatz. Da $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$, ferner $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$, sodann $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3}$ u. s. f. ist, so kann der vorige Ausdruck für $(a+b)^n$ (§. 392.) nun leicht in folgenden verwandelt werden, indem a^n als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder gesetzt wird. Es ist nämlich
$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{nb}{a} + \frac{n.\,n-1}{1.\ 2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \ldots\right)$$
Setzt man hier den Quotienten $\frac{b}{a} = q$, so wird nun
$$(a+b)^n = a^n\left(1 + nq + \frac{n.\,n-1}{1.\ 2}\cdot q^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot q^3 + \ldots\right)$$

§. 394.

Zusatz. Nun sey in $(a+b)^n$ der erste Theil $a = P$, und $\frac{b}{a} = Q$, so wird die so eben (§. 393.) gefundene Reihe in folgende verwandelt:

$$(a+b)^n = P^n \left(1 + nQ + \frac{n.\,n-1}{1.\ 2} Q^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3.} Q^3 \ldots\right)$$

Nennt man nun das erste Glied dieser Reihe A, das zweite B, das dritte C, das vierte D u. s. f., so ist

$P^n.\ 1 = A$, ferner

$P^n.\ nQ = A \,.\, nQ = nAQ = B$, und

$$P^n.\ \frac{n.\,n-1}{1.\ 2}\,.\,Q^2 = P^n.\ nQ.\,\frac{n-1}{2}\,.\,Q = \frac{n-1}{2}\,.\,BQ = C, \text{ und}$$

$$P^n.\ \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}\,.\,Q^3 =$$
$$P^n.\ \frac{n.\,n-1}{1.\ 2}\,Q^2.\,\frac{n-2}{3}\,.\,Q = \frac{n-2}{3}\,.\,CQ = D, \text{ und}$$

$$P^n.\ \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,.\,Q^4 =$$
$$P^n.\ \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}\,Q^3\,\frac{n-3}{4}\,.\,Q = \frac{n-3}{4}\,DQ = E \ldots.$$

Folglich wird nun auch

$$(a+b)^n = (P+PQ)^n = P^n + nAQ + \frac{n-1}{2}BQ + \frac{n-2}{3}CQ + \frac{n-3}{4}DQ + \frac{n-4}{5}EQ + \frac{n-5}{6}FQ + \ldots\ldots$$

§. 395.

Aufgabe. Vermittelst des binomischen Lehrsatzes (§. 385.) eine gegebene zweytheilige Größe zu einer Potenz zu erheben, deren Exponent eine beliebige ganze, positive Zahl ist; z. B. $\left(\frac{a}{2}+2b\right)^5$ zu entwickeln.

Auflösung. Hier ist (nach §. 394.) $\frac{a}{2} = P$, $\frac{2b}{\frac{a}{2}} = \frac{4b}{a} = Q$, und $n = 5$. Folglich wird nun

$$P^n = \left(\frac{a}{2}\right)^5 = \frac{a^5}{32} = A,$$

$$nAQ = 5 \times \frac{a^5}{32} \times \frac{4b}{a} = \frac{5a^4b}{8} = B,$$

$$\frac{n-1}{2}BQ = \frac{4}{2} \times \frac{5a^4b}{8} \times \frac{4b}{a} = 5a^3b^2 = C,$$

$$\frac{n-2}{3}CQ = \frac{3}{3} \times 5a^3b^2 \times \frac{4b}{a} = 20a^2b^3 = D,$$

$$\frac{n-3}{4}DQ = \frac{2}{4} \times 20a^2b^3 \times \frac{4b}{a} = 40ab^4 = E,$$

$$\frac{n-4}{5} EQ = \frac{1}{5} \times 40ab^4 \times \frac{4b}{a} = 32b^5 = F,$$

$$\frac{n-5}{6} FQ = \frac{5-5}{6} FQ = 0.$$ Folglich ist

$$\left(\frac{a}{2} + 2b\right)^5 = \frac{a^5}{32} + \frac{5a^4b}{8} + 5a^3b^2 + 20a^2b^3 + 40ab^4 + 32b^5.$$

Erläuterung. Man soll 15 zur fünften Potenz erheben. Hier setze man $15 = 10 + 5$, so wird

$(10 + 5)^5 = (a + b)^5$, und es ist

$P = 10$, $Q = \frac{b}{a} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Folglich wird

$P^5 = 10^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots 100000 = A,$

$nAQ = 5 \times 100000 \times \frac{1}{2} = \ldots\ldots 250000 = B,$

$\frac{n-1}{2} BQ = 2 \times 250000 \times \frac{1}{2} = \ldots 250000 = C,$

$\frac{n-2}{3} CQ = 1 \times 250000 \times \frac{1}{2} = \ldots 125000 = D,$

$\frac{n-3}{4} DQ = \frac{1}{2} \times 125000 \times \frac{1}{2} = \ldots 31250 = E,$

$\frac{n-4}{5} EQ = \frac{1}{5} \times 31250 \times \frac{1}{2} = \ldots\ldots 3125 = F,$

$\frac{n-5}{6} FQ = 0.$ Daher ist

$(10 + 5)^5 = 15^5 = \ldots\ldots\ldots 759375.$

Da $10 + 5 = 11 + 4 = 12 + 3 = 13 + 2$ u. s. f. ist, so lassen sich die Theile von 15^5 auch durch Entwickelung des Binomiums $(11 + 4)^5$, oder $(12 + 3)^5$, oder $(13 + 2)^5$ u. s. f. finden. Den Anfängern dienen diese Rechnungen zur Probe.

§. 396.

Aufgabe. Durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes aus einer Größe die Wurzel eines ganzen und positiven Grades zu ziehen; z. B. $\sqrt{(a + b)}$ zu bestimmen.

Auflösung. Da $\sqrt{(a + b)} = (a + b)^{\frac{1}{2}}$, so entwickele man hier $(a + b)^{\frac{1}{2}}$ (nach §. 394.). Es ist nämlich für diesen Fall $n = \frac{1}{2}$, $P = a$, und
$PQ = b$; folglich hat man

$$P^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},$$

$$nAQ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b\sqrt{a}}{2a},$$

$$\frac{n-1}{2} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b\sqrt{a}}{2a} \cdot \frac{b}{a} = -\frac{b^2\sqrt{a}}{8a^2},$$

$$\frac{n-2}{3} CQ = -\frac{1}{2} - \frac{b^2\sqrt{a}}{8a^2} \cdot \frac{b}{a} = +\frac{b^3\sqrt{a}}{16a^3},$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{b^3\sqrt{a}}{16a^3} \cdot \frac{b}{a} = -\frac{5b^4\sqrt{a}}{128a^4}.$$

Daher ist nun

$$\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \frac{b\sqrt{a}}{2a} - \frac{b^2\sqrt{a}}{8a^2} + \frac{b^3\sqrt{a}}{16a^3} - \frac{5b^4\sqrt{a}}{128a^4} + \ldots$$

Nennt man den Quotienten $\frac{b}{a} = q$, so wird auch kürzer

$$\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{16} - \frac{5q^4}{128} + \ldots\right)$$

Erläuterung. Sollte $\sqrt{5}$ gefunden werden, so setze

man $\sqrt{5} = \sqrt{(4+1)}$; und es wird nun $4 = a$, $1 = b$, $q = \frac{1}{4}$, folglich $\sqrt{(4+1)} = \sqrt{4}\,(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} - \frac{5}{32768} + \ldots) = 2{,}2360\ldots$

Durch weiter fortgesetztes Berechnen der Reihe wird auch der Werth von $\sqrt{5}$ immer schärfer gefunden.

§. 397.

Zusatz. Für $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ wird $n = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{8}{12}$, ferner $P = a$, und $PQ = b$, und man bekömmt, nach gehöriger Rechnung, (wie im §. 396.) folgendes

$$(a+b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} + \frac{b\,.\sqrt[3]{a}}{3a} - \frac{b^2\sqrt[3]{a}}{9a^2}$$

$$+ \frac{5b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3} - \frac{40b^4\sqrt[3]{a}}{972a^4} \ldots\ldots$$

Dies giebt auch, wenn man $\sqrt[3]{a}$ als gemeinschaftlichen Factor, und $\frac{b}{a} = q$ setzt, die Reihe:

$$(a+b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{q}{3} - \frac{q^2}{9} + \frac{5q^3}{81} - \frac{10q^4}{243} + \ldots\ldots\right)$$

Eine Erläuterung in Zahlen kann hier eben so leicht, wie vorhin (im §. 396.) beygebracht werden. Diese Rechnung ist eine nützliche Uebung für Anfänger.

§. 398.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann nun auch ganz allgemein für $\sqrt[n]{(a+b)}$ eine Reihe gefunden werden. Führt man diese Rechnung nach dem Bisherigen (§. 396. u. 397.) durch, so ergiebt sich

$$\sqrt[n]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n}$$

$$+ \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \sqrt[n]{a} + \frac{1-n \,.\, 1-2n}{6n^3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots .$$

oder, wenn $\frac{b}{a} = q$ gesetzt wird,

$$\sqrt[n]{(a+b)} = \sqrt[n]{a}\left(1 + \frac{q}{n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot q^2\right.$$

$$\left. + \frac{1-n \,.\, 1-2n}{6n^3} q^3 \ldots .\right)$$

§. 399.

Zusatz. Um $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ zu entwickeln, setze man in die oben (§. 394.) gefundene Reihe für das dortige n den Bruch $\frac{m}{n}$; so wird $(a+b)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ$

$$+ \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ \ldots .$$

§. 400.

Zusatz. Auch auf Potenzen von negativen Exponenten kann der binomische Lehrsatz angewendet werden. Um

$(a+b)^{-1}$ zu entwickeln, erinnere man sich (aus §. 46.), daß $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}$ ist. Folglich wird nun (nach §. 396.)

$$P^n = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

$$nAQ = -1 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{-b}{a^2},$$

$$\frac{n-1}{2} BQ = \frac{-1-1}{2} \cdot -\frac{b}{a^2} \cdot \frac{b}{a} = +\frac{b^2}{a^3},$$

$$\frac{n-2}{3} CQ = \frac{-1-2}{3} \cdot +\frac{b^2}{a^3} \cdot \frac{b}{a} = -\frac{b^3}{a^4},$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = \frac{-1-3}{4} \cdot -\frac{b^3}{a^4} \cdot \frac{b}{a} = +\frac{b^4}{a^5} \ldots$$

folglich ist $(a+b)^{-1} =$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \ldots$$

Eben diese unendliche Reihe findet man auch durch wirkliche Ausführung der Division $\frac{1}{a+b}$ nach den Regeln der Buchstabenrechnung (§. 49)

§. 401.

Zusatz. Auf ähnliche Weise findet man $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} +$

$$\frac{6b^2}{2a^4} - \frac{24b^3}{6a^5} \ldots \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} \ldots$$

Und allgemein wird $(a + b)^{-n} =$

$$\frac{1}{(a+b)^n} = \frac{1}{a^n} - \frac{nb}{a^{n+1}} + \frac{n \,.\, n+1 \,.\, b^2}{1 \,.\, 2 \,.\, a^{n+2}}$$

$$- \frac{n \,.\, n+1 \,.\, n+2 \,.\, b^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a^{n+3}} + \ldots\ldots,$$

Für einen negativen gebrochenen Exponenten, oder für $(a + b)^{-\frac{m}{n}}$ erhält man eine ähnliche Reihe.

Zweyter Abschnitt.

Grundlehren der Integralrechnung.

I. Einleitung.

§. 402.

Erklärung. Das Integral eines gegebenen Differentials heißt eine Größe, aus deren Differentiation jene gegebene entsprungen ist. Daher kann jede Größe als das Integral derjenigen angesehen werden, welche man durch das Differentiiren aus ihr erhält. Integriren heißt, zu einer gegebenen Differentialgröße das gehörige Integral finden. Die Integralrechnung ist daher die Anweisung,

diese Integrale, zur Erreichung eines bestimmten Zweckes, aufzufinden.

§. 403.

Willkührlicher Satz. Der lateinische Buchstabe S, welcher vor eine Differentialgröße gesetzt wird, bedeutet das Integral dieser Größe. So heißt $S(xdy + ydx) = xy$ so viel als: das Integral der in der Klammer stehenden Größen ist dem Producte xy gleich. Denn es ist (nach §. 290.) $d(xy) = xdy + ydx$.

§. 404.

Grundsatz. Soll ein vorgegebenes Integral das richtige seyn, so muß, wenn dasselbe wiederum differentiirt wird, das anfängliche Differential zum Vorscheine kommen. Diese Probe des Integrirens ist besonders den ersten Anfängern zu empfehlen.

§. 405.

Zusatz. Da das Integriren das Entgegengesetzte des Differentiirens ist, so sind durch die oben (§. 289—299) bewiesenen Regeln der Differentiation auch eben so viele Integrale aufgefunden worden. Es ist nämlich:

I. $S(dx + dy) = x + y$ (§. 289.)
II. $S(xdy + ydx) = xy$ (§. 290.)
III. $S(adx) = ax$ (§. 291.)
IV. $S(xydz + xzdy + yzdx) = xyz$ (§. 292.)
V. $S(2xdx) = x^2$ (§. 294.)
VI. $S(3x^2dx) = x^3$ (§. 295.)
VII. $S(mx^{m-1}dx) = x^m$ (§. 296.)

VIII. $S\left(\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} dx\right) = \sqrt[m]{x}$ (§. 299, II.)

IX. $S\left(\frac{adx}{2\sqrt{x}}\right) = a\sqrt{x}$ (§. 299, III.)

X. $S\left(\frac{-adx}{x^2}\right) = \frac{a}{x}$ (§. 299, IV.)

XI. $S\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = \frac{x}{y}$ (§. 297.)

XII. $S\left(\frac{3axy^2dy - 2ay^3dx}{x^3}\right) = \frac{ay^3}{x^2}$ (§. 299, VI.)

XIII. $S\left(\frac{-a^2bydx - a^2bxdy}{x^2y^2}\right) = \frac{a^2b}{xy}$ (§. 299, VII.)

XIV. $S\left(\frac{-3adx}{2\sqrt{x^5}}\right) = \frac{a}{\sqrt{x^3}}$ (§. 299, VIII.)

Auf gleiche Weise lassen sich für die übrigen oben (§. 299, IX — XIII.) angegebenen Differentiale sehr leicht die zugehörigen Integrale bestimmen.

§. 406.

Zusatz. Die veränderliche Größe y hat nur Ein Differential $= dy$. Allein der Differentialgröße dy können unendlich viele Integrale zugehörig seyn. Denn da die Größen

$a + y$, $a^2 + y$, $3a + b + y$, $b + y$, $y - \frac{a}{b}$

u. s. w. alle ein und dasselbige Differential $= dy$ haben, (weil das Differential jeder beständigen Größe $= 0$) so drückt man dieses meistens so aus: $S(dy) = y \pm C$, wo C die Constante bedeutet. Wie diese beständige Größen gehörig bestimmt werden können, um das Integral vollständig zu erhalten, muß man aus der Natur der jedesmaligen

Aufgabe beurtheilen. Aus diesem Grunde ist es nicht schwer, das Differential einer jeden gegebenen Größe zu finden; allein die richtige Auffindung des zu einer vorgegebenen Differentialgröße gehörigen Integrals macht oft sehr große Schwierigkeiten. In den ersten Elementen kann aber davon keine weitere Rede seyn.

§. 407.

Aufgabe. Die Regeln anzugeben, nach welchen man die zu den gefundenen Differentialgrößen gehörigen Integrale bestimmen kann.

Auflösung. I. Um aus dem Differentiale das Integral zu finden, muß man den entgegengesetzten Weg desjenigen einschlagen, auf welchem man oben (§. 289—299.) aus gegebenen Integralgrößen die Differentialien abgeleitet hat. Hieraus entspringt die

Erste Hauptregel. Man erhöhe die Potenz der veränderlichen Größe um einen Grad, und dividire sie nunmehr sowohl durch diesen neuen Exponenten, als auch durch das Differential der veränderlichen Größe; so erhält man aus dem Differentiale das ihm zugehörige Integral.

Erläuterungen. 1.) Das Differential sey $my^{m-1} dx$; so giebt die um 1 erhöhete Potenz $mx^{m} dx$, woraus, wenn man nun mit dem neuen Exponenten m, und dem Differentiale von x, oder mit dx, dividiret, das Integral x^{m} entspringet.

2) Wäre $\frac{-adx}{x^2}$ zu integriren; so ist $\frac{-adx}{x^2} =$

$-ax^{-2}dx$. Den Exponenten um 1 vermehrt, giebt $-ax^{-1}dx$, und nun mit -1 und dx dividirt, wird der Quotient $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ das richtige Integral geben. (§. 299. IV.)

3) Hätte man das Differential $\frac{-3adx}{2\sqrt{x^5}}$, so wird dieses $= -\frac{3}{2}ax^{-\frac{5}{2}}dx$. Durch Vermehrung des Exponenten um 1 erhält man $-\frac{3}{2}ax^{-\frac{3}{2}}dx$, und durch Division mit dem neuen Exponenten $-\frac{3}{2}$ und mit dx wird das Integral $ax^{-\frac{3}{2}} = \frac{a}{\sqrt{x^3}}$ (§. 299. VIII.)

II. Da aber bey dem auf diese Weise gefundenen Integrale noch beständige Größen seyn können, welche durch Bestimmung seines Differentials verschwinden (§. 287. II.), so bemerke man noch folgende

Zweyte Hauptregel: Man setze in dem gefundenen Integrale die veränderliche Größe = o. Wenn nun hierdurch das ganze Integral = o wird, so ist dasselbe vollständig. Bleibt dagegen eine beständige Größe zurücke, so muß dieselbe, mit dem entgegengesetzten Zeichen, dem erhaltenen Integrale beygefügt werden. Denn gesetzt, das vollständige Integral einer Differentialgröße von x sey = J, das durch die Rechnung gefundene = S, welchem man noch eine beständige Größe C zusetzen muß, um J zu geben; so ist J = S + C. Nun habe x einen bestimmten Werth = a. Wird hier in J wirklich x = o gesetzt, so ist auch S + C = o, folglich S = — C, oder — S = C. In den hier folgen-

den leichten Anwendungen der Integralrechnung kommen nur vollständige Integrale vor. Daher wird obige Regel in diesen Grundlehren, zur Bestimmung der beständigen Größen, nicht weiter gebraucht.

II. Anwendung der Integralrechnung auf die Quadratur der Flächen.

§. 408.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für das Flächendifferential zu finden.

Auflösung. Es sey ACEFH (Fig. 80.) eine von der Curve ACEF und den Coordinaten AH, HF eingeschlossene Fläche. Man setze AB $= x$, und BD $= dx$, ferner BC $= y$; so ist, nachdem man CG gleichlaufend mit AH gezogen hat, EG $= dy$. Hier wird nun das Rechteck CGDB $= ydx$, nebst dem Dreyecke CEG $= \frac{1}{2}\, dxdy$, die Fläche CEDB, oder das Differential der Fläche AFH, bilden. Allein $dxdy$ kann gegen ydx als Null betrachtet und weggelassen werden (§. 290.). Folglich ist der Ausdruck des allgemeinen Flächendifferentials $= ydx$.

§. 409.

Zusatz. Wäre ACEF eine gerade Linie, folglich AFH ein geradliniges Dreyeck; so würden die nämlichen Schlüsse, wie vorhin Statt finden, und das Flächendifferential ist auch hier $= ydx$.

§. 410.

Aufgabe. Eine allgemeine Weisung zur Quadratur der Flächen, vermittelst der Integralrechnung, zu geben.

Auflösung. 1.) Man bestimme aus der Natur der zu quadrirenden Fläche den Werth der Ordinate y.

2.) Diesen Werth setze man in die allgemeine Formel ydx.

3.) Das hieraus Erhaltene integrirt, giebt den Werth der gesuchten Fläche.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Vorschriften beruhet auf den richtigen Begriffen vom Differentiale und Integrale, und wird durch folgende Beyspiele vollkommen deutlich werden.

§. 411.

Aufgabe. Den Inhalt eines Dreyecks durch die Integralrechnung zu finden.

Auflösung. Es sey des Dreyecks ABC (Fig. 81.) Höhe $AD = a$, Grundlinie $BC = b$; ferner sey $Am = x$, $mg = dx$, $hn = y$; so ist $hnlf = ydx$ das Differential der Fläche. Um hierin y aus der Natur des Dreyecks zu bestimmen, bedenke man, daß $AD : BC = Am : hn$, oder $a : b = x : y$, folglich $y = \frac{bx}{a}$ ist. Daher wird $ydx = \frac{bxdx}{a}$, und $S\left(\frac{bxdx}{a}\right)$ ist der durch die veränderliche Linie x bestimmte Theil des $\triangle$ ABC. Allein $S\left(\frac{bxdx}{a}\right) = \frac{bx^2}{2a}$ (§. 407. I.), folglich ist $\frac{bx^2}{2a}$ der Inhalt des Dreyecks, worin jedoch x noch unbestimmt ist.

Will man nun die Formel für das bestimmte △ ABC finden, so setze man nur $x (= Am) = AD = a$; so wird $\frac{bx^2}{2a} = \frac{ba^2}{2a} = \frac{1}{2} ab$, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 412.

Zusatz. Setzt man in dem hier gefundenen Integrale $\frac{bx^2}{2a}$ den Werth von $x = 0$, so wird der Zähler bx^2, und folglich das ganze Integral, $= 0$. Daher ist es vollständig (§. 407. II.). Auch erhellet dies aus Betrachtung der Figur. Denn wenn x, oder die Höhe Am verschwindet, so verschwindet auch der Inhalt des ganzen △ ABC.

§. 413.

Zusatz. Da die allgemeine Formel $\frac{bx^2}{2a}$ die veränderliche Größe x enthält, so kann sie nur dann einen bestimmten Werth geben, wenn man x bestimmt. Wäre nun z. B. $x = 2AD = 2a$, so würde sie $= \frac{b.2a.2a}{2a} = b.2a = 2ab$, folglich das Dreyeck nun viermal so groß als vorhin, wo es $= \frac{1}{2} ab$ gewesen ist. Auch dies ist im vollen Einklange mit der niedern Geometrie, welche beweiset, daß sich ähnliche Dreyecke wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Höhen verhalten. Diese Höhen sind aber hier wie 1 : 2, folglich ihre Quadrate wie 1 : 4.

§. 414.

Aufgabe. Den Inhalt eines Paralleltrapez zu finden.

Auflösung. Wenn EFHG (Fig. 82.) das gegebene Paralleltrapez ist, so denke man sich dessen nicht gleichlaufende Seiten GE und HF zum Durchschnittspuncte A verlängert, und das Loth AD gezogen. Nun sey AB $= a$, BD $= b$, AD $= a + b$, GH $= c$, BC $= x$, CK $= dx$, und NL $= y$. Hier ist NLM*O*, das Differential der Fläche, $= ydx$, worin y aus der Natur des Paralleltrapez bestimmt werden muß. Nun ist aber AD : GH = AC : NL, oder

$$a + b : c = a + x : \frac{ac + cx}{a + b} = \text{NL} = y;$$

folglich $ydx = \dfrac{acdx}{a + b} + \dfrac{cxdx}{a + b}$, und

$$\text{S}\left(\frac{acdx}{a + b} + \frac{cxdx}{a + b}\right) = \frac{acx}{a + b} + \frac{cx^2}{2(a + b)}.$$

Setzt man nun in diesem allgemeinen Ausdrucke für das unbestimmte x einen bestimmten Werth, z. B. $x =$ DB $= b$;

so wird EFHG $= \dfrac{acb}{a + b} + \dfrac{b^2c}{2(a + b)} =$

$$\frac{2abc + b^2c}{2(a + b)} = \left(\frac{2ac + bc}{a + b}\right) \times \frac{b}{2} =$$

$\left(\dfrac{ac}{a + b} + c\right) \times \dfrac{b}{2}$. Allein es ist, wegen $a + b : a = c :$ EF, diese EF $= \dfrac{ac}{a + b}$. Folglich wird EFGH = (EF + GH) $\times \frac{1}{2}$BD, wie aus der Geometrie hinlänglich bekannt ist.

§. 415.

Aufgabe. Den Inhalt der Parabelfläche zu finden, wenn die Ordinaten auf der Achse lothrecht stehen.

Auflösung. Es sey MAM (Fig. 83.) eine parabolische Curve, AR ihre Axe, MM, *mm* senkrechte Ordinaten für die Abscissen AP, A*p*. Man soll die Fläche der Figur MAPM finden. Hier ist AP $= x$, PM $= y$, und P*p* $= dx$; folglich PM *mp* $= ydx$, oder das Differential der Fläche MAPM. Nun ist aus der Natur der Parabel (§. 179.) $y^2 = px$, folglich $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Daher wird hier $ydx = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$. Allein $S(p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx) = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ (§. 407, I.) $= \frac{2}{3}\sqrt{px^3} = \frac{2}{3}\sqrt{y^2x^2}$ (da $px = y^2$) $= \frac{2}{3}xy$; folglich ist MAMP $= \frac{2}{3}$ AP $\times$ PM, und MAMPM $= \frac{2}{3}$ AP $\times$ MM.

§. 416.

Zusatz. Die Vollständigkeit des hier gefundenen Integrals erhellet daraus, daß $\frac{2}{3}xy = 0$ wird, wenn man $x = 0$ setzt (§. 407, II.). Auch zeigt dieses die Betrachtung der Figur, denn wenn die Abscisse AP verschwindet, so verschwindet auch die Figur MAMPM.

§. 417.

Zusatz. Wenn man über die Linie MM, das Rechteck DCMM construiret, dessen Höhe AP, so ist sein Inhalt $= xy$. Da nun die Parabelfläche MAMPM $= \frac{2}{3}xy$, so ist diese Fläche zwey Drittheile des Rechtecks aus der Abscisse AP und der ihr zugehörigen Ordinate MM. — Eben so ist auch APMA $= \frac{2}{3}$ ADMP. Folglich theilt die parabolische Curve AM das Rechteck ADMP in zwey Theile ADM und APMA, die sich verhalten wie 1 : 2.

§. 418.

Zusatz. Denkt man sich von A nach den Puncten M und M zwey gerade Linien MA, AM; so ist △ MAM = ½ MCDM; allein MAMPM = ⅔ MCDM (§. 417.) folglich ist △ MAM = ¾ MAMPM, oder ⁴⁄₃ △ MAM = MAMPM.

§. 419.

Anmerkung. Auch ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung kann die Parabelfläche gefunden werden. Archimedes ist der Erste gewesen, der dieses Problem aufgelöset hat. Seine Beweise sind ein Muster des geometrischen Scharfsinns. Zum Besten der Anfänger theilen wir folgende sehr einfache Auflösung mit (nach La Chapelle in s. Abhdlg. von den Kegelschnitten).

I. Es sey AB (Fig. 84.) die Axe, BC die Ordinate der Curve AC, und ABCQ das über diese Coordinaten beschriebene Rechteck. Man theile AB in eine beliebige Menge gleicher Theile AD, DE, EF, FB, ziehe die mit BC parallelen FL, EH, DG, und durch die Puncte *m*, *n*, *o* die mit AB gleichlaufenden MP, TO, KN. Die Rechtecke QG*m*M, GH*nf*, HL*og* heissen die in den Raum AQC beschriebenen, die Rechtecke QGDA, GH*rm*, HL*sn* aber die um diesen Raum beschriebenen. Man soll zeigen, daß der Unterschied zwischen diesen und jenen kleiner werden kann, als jede angebliche, noch so kleine, Größe. Da QGDA — QG*m*M = M*m*DA, GH*rm* — GH*nf* = *fnrm* = T*fm*M, HL*sn* — HL*og* = *gosn* = K*tf*T, und LCN*o* = QG*tk*; so ist der Unterschied aller um und in den Raum AQC beschriebenen Rechtecke dem Rechtecke QGDA gleich. Wenn aber die Linie

AB, durchfortgesetztes Halbiren, immer in kleinere und kleinere Theile getheilt wird, so wird AD, und folglich auch ADGQ, kleiner als jede angebliche Größe. Daher gilt eben dieses auch vom oben bemerkten Unterschiede.

II. Nun sey Adc (Fig. 85.) eine halbe Parabel, AB ein Theil der Axe, und Bc die dazu gehörige Ordinate. Nimmt man in der Verlängerung von BA die AE = AB, und ziehet Ec; so ist diese die Tangente für den Punct c (§. 192, II.) und cd stellt ein Element der parabolischen Curve vor. Ergänzt man nun zu AB und Bc das Rechteck $ABcD$, und ziehet sodann durch d die af mit AB, und die gh mit AD gleichlaufend; so ist zu erweisen, daß Rechteck $Dafc = \frac{1}{2}$ Rechteck $ghBc$. Denn $cB : BE = cf : fd$, folglich $cB \times fd = cf \times BE$, oder $Bc \times Bh = 2BA \times cf = 2cD \times cf$, d. h. Rechteck $ghBc = 2$ Rechteck $Dafc$. Theilet man nun die gerade DA in unendlich viele gleiche Theile wie Da, und construirt auf ähnliche Weise die Rechtecke vermittelst dieser Theilungspuncte, so hat zwischen zwey zusammengehörigen Rechtecken immer dieses Verhältniß wie 1 : 2 Statt. Auch muß der Unterschied aller um und in die Figur cDA und cAB beschriebenen hierbey kleiner als jede denkbare Größe werden (I). Allein auf der Seite DA bildet die Summe aller Rechtecke die Figur cDA, und auf der Seite cB macht diese Summe die Figur cAB aus. Folglich ist die Parabelfläche $AcB = \frac{2}{3}$ $ADcB$, wie vorhin (§. 415).

§. 420.

Zusatz. I. Hieraus läßt sich nun auch das durch die zwey senkrechten Ordinaten BE und cF (Fig. 86.) bestimmte Stück der Parabelfläche, nämlich BEFC, berechnen. Denn es ist (nach §. 415.) die Fläche BEFC $= \frac{2}{3}(x + z)\, y - \frac{2}{3} xv$ $= \frac{2}{3}((x + z)\, y - xv)$.

II. Das durch die schiefwinkelige Ordinate BF, den parabolischen Bogen AEF und den Theil AB der Axe eingeschlossene Stück AEFBA wird gefunden, wenn man von AEFCA das Dreyeck FCB abzieht. Daher ist solches $= \frac{2}{3}(x+z)y - \frac{1}{2}yz = \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}yz - \frac{1}{2}yz = \frac{2}{3}xy + \frac{1}{6}yz = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}z)y$.

§. 421.

Aufgabe. Den Inhalt der Kreisfläche vermittelst senkrechter Coordinaten zu finden.

Auflösung. In dem Quadranten ECA (Fig. 87.) nehme man $CP = x$, $PM = y$, $CM = r$, $Pp = dx$; so ist $PpmM$ das Flächendifferential des Quadranten, $= ydx$. Da nun $y^2 = r^2 - x^2$, so ist $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, und $ydx = dx\sqrt{(r^2 - x^2)}$. Um nun diesen Ausdruck zu integriren, muß $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Dies geschieht, durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes, (§. 385.) auf folgende Art. Da nämlich $\sqrt{(r^2 - x^2)} = (r^2 - x)^{\frac{1}{2}}$ ist, so wird nun (nach §. 394.) $n = \frac{1}{2}$, $P = r^2$, und $Q = \frac{-x^2}{r^2}$. Dies giebt

$$P^n = (r^2)^{\frac{1}{2}} = r = A,$$

$$nAQ = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{-x^2}{r^2} = \frac{-x^2}{2r} = B,$$

$$\frac{n-1}{2}BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-x^2}{2r} \cdot \frac{-x^2}{r^2} = \frac{-x^4}{8r^3} = C,$$

$$\frac{n-2}{3}CQ = \frac{-3}{6} \cdot \frac{-x^4}{8r^3} \cdot \frac{-x^2}{r^2} = \frac{-x^6}{16r^5} = D,$$

$$\frac{n-3}{4}DQ = \frac{-5}{8} \cdot \frac{-x^6}{16r^5} \cdot \frac{-x^2}{r^2} = \frac{-5x^8}{128r^7} = E,$$

$$\frac{n-4}{5}EQ = \frac{-7}{10} \cdot \frac{-5x^8}{128r^7} \cdot \frac{-x^2}{r^2} = \frac{-7x^{10}}{256r^9} = F.$$

Daher ist $\sqrt{(r^2-x^2)} = r - \frac{x^2}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^6}{16r^5}$
$- \frac{5x^8}{128r^7} - \frac{7x^{10}}{256r^9} \ldots\ldots$

Folglich wird nun $dx \sqrt{(r^2-x^2)}$ oder $ydx =$
$rdx - \frac{x^2dx}{2r} - \frac{x^4dx}{8r^3} - \frac{x^6dx}{16r^5} - \frac{5x^8dx}{128r^7} -$
$\frac{7x^{10}dx}{256r^9} \ldots\ldots$

Integrirt man nun jedes Glied dieser Reihe, so wird
$Srdx = rx$ (§. 405, III.)

$S\frac{x^2dx}{2r} = \frac{x^3}{6r}$ (§. 405, IV.)

$S\frac{x^4dx}{8r^3} = \frac{x^5}{40r^3}$

$S\frac{x^6dx}{16r^5} = \frac{x^7}{112r^5}$

$S\frac{5x^8dx}{128r^7} = \frac{5x^9}{1152r^7}$

$S\frac{7x^{10}dx}{256r^9} = \frac{7x^{11}}{2816r^9} \ldots\ldots$ Daher ist $Sydx =$

$rx - \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{40r^3} - \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7} - \frac{7x^{11}}{2816r^9} \ldots$

Nimmt man nun CP = CA, d. h. $x = r$, so ist die Fläche des Quadranten

CAMC = Q =

$$r^3 - \frac{r^2}{6} - \frac{r^2}{40} - \frac{r^2}{112} - \frac{5r^2}{1152} - \frac{7r^2}{2816} \ldots$$

Wird nun hier $r = 1$ gesetzt, so ist

$$Q = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \ldots$$

und für $r = \frac{1}{2}$ wird die Fläche des ganzen Kreises, oder C, =

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \ldots$$

§. 422.

Aufgabe. Den Inhalt der Kreisfläche vermittelst eines Abschnittes zu finden.

Auflösung. Es sey CBO (Fig. 87.) ein beliebiger Ausschnitt des gegebenen Quadranten ECB, und $CB = r$. Man ziehe die Tangente BT, verlängere CO in Q, und ziehe die CT der CQ unendlich nahe. Nimmt man nun $BQ = x$, so ist $QT = dx$, und $CQ = \sqrt{(CB^2 + BQ^2)} = \sqrt{(r^2 + x^2)}$. Wird nun mit dem Halbmesser CQ der unendlich kleine Bogen QS beschrieben, so ist, wenn SQ verlängert wird, bis sie die verlängerte CB in L schneidet, $\triangle TSQ \backsim \triangle BQL \backsim \triangle CQB$, folglich $CQ : CB = QT : QS$, oder

$\sqrt{(r^2+x^2)} : r = dx : QS$, daher $QS = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$.

Ferner ist auch $CQ : CO = QS : ON$, oder $\sqrt{(r^2 + r^2)} : r = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2+x^2)}} : ON$; folglich $ON = \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$, und das

Differential des Ausschnittes OCB, nämlich NCO, ist = $\frac{1}{2}$ NO × CO = $\frac{r^3 dx}{2(r^2+x^2)} = \frac{dx}{2} \times \frac{r^3}{r^2+x^2}$. Um nun dieses Differential zu integriren, muß der Bruch: $\frac{r^3}{r^2+x^2}$ in eine unendliche Reihe verwandelt, und jedes Glied derselben mit dem Factor $\frac{dx}{2}$ multiplicirt werden. Diese unendliche Reihe wird erhalten, wenn man mit r^2+x^2 wirklich in r^3 dividirt, welches folgende Rechnung giebt:

$$r^2+x^2 \left(\begin{array}{l} r^3 \\ r^3 + rx^2 \end{array} \right) r - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{r^3} - \frac{x^6}{r^5} + \frac{x^8}{r^7} - \ldots$$

$$-rx^2$$

$$-rx^2 - \frac{x^4}{r}$$

$$+\frac{x^4}{r}$$

$$\frac{x^4}{r} + \frac{x^6}{r^3}$$

$$-\frac{x^6}{r^3}$$

$$-\frac{x^6}{r^3} - \frac{x^8}{r^5}$$

$$+\frac{x^8}{r^5}$$

$$+\frac{x^8}{r^5} + \frac{x^{10}}{r^7}$$

$$-\frac{x^{10}}{r^7}$$

welche das Gesetz des Fortgangs dieser Reihe sogleich dar=

stellt. Multiplicirt man jedes Glied derselben mit $\frac{dx}{2}$, so wird nun $\frac{r^3dx}{2(r^2+x^2)} = \frac{rdx}{2} - \frac{x^2dx}{2r} + \frac{x^4dx}{2r^3} - \frac{x^6dx}{2r^5} + \frac{x^8dx}{2r^7} \dots$

Da nun hier jedes einzelne Glied leicht zu integriren ist, so hat man OCB $= \frac{rx}{2} - \frac{x^3}{6r} + \frac{x^5}{10r^3} - \frac{x^7}{14r^5} + \frac{x^9}{18r^7} - \dots$ Setzt man noch BQ = BC, oder x = r, so ist der Winkel BCO = 45°, oder der Ausschnitt OCB der achte Theil der ganzen Kreisfläche. Daher wird nun, für r = 1, der Quadrant ECB

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$

Setzt man den Durchmesser des Kreises = 1, so ist dessen Inhalt dem vorigen Quadranten gleich. Daher drückt die eben gefundene Reihe auch den Inhalt des Kreises für den Durchmesser = 1 aus.

§. 423.

Anmerkung. Von diesen beyden für den Flächeninhalt des Kreises gefundenen Reihen (§. 421 und 422.) heißt die erste die Newtonische, die andere die Leibnitzische, von den Namen ihrer unsterblichen Erfinder. Leibnitz hatte die seinige um das Jahr 1673 seinen Freunden mitgetheilt. Er hielt sie, wegen ihrer Einfachheit, sehr befriedigend für den Verstand. Doch war auch diese Reihe schon im J. 1671 dem Schottländer Jakob Gregory bekannt. Da sie sehr wenig convergirend ist, so kann sie zur wirklichen Berechnung des Kreisinhaltes nicht angewendet werden.

§. 424.

Aufgabe. Die Fläche der Ellipse zu finden.

Auflösung. Es sey ADC (Fig. 88.) ein elliptischer, und AFC ein Kreisquadrant, die halbe große Axe CA = r, die halbe kleine Axe CD = b. Zieht man nun die Ordinaten PM, pm unendlich nahe beysammen, und nennt die Absciße CP = x; so ist Pp = dx, und man hat, weil $PM = y = \frac{b}{r} \sqrt{(r^2 - x^2)}$ (§. 200.) das Flächenelement (§. 408.) $ydx = \frac{bdx}{r} \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Da nun $dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$ das Element der Kreisfläche für den Halbmesser = r ist (§. 421), so ist klar, daß die Quadratur der Ellipse von der Quadratur des Kreises abhänge. Werden daher die Ordinaten PM, pm nach G, g verlängert, so ist nun $S \frac{bdx}{r} \sqrt{(r^2 - x^2)} = DMPC$, und $Sdx \sqrt{(r^2 - x^2)} = FGPO$. Folglich $DMPC : FGPC = \frac{bdx}{r} : dx = b : r$.

Da dieses nun von allen andern zusammengehörigen Theilen des Quadranten der Ellipse und des Kreises gilt, so verhält sich der elliptische Quadrant zu dem Kreisquadranten, wie CD : CA, d. h die Fläche der ganzen Ellipse verhält sich zur Fläche des mit ihrer halben großen Axe beschriebenen Kreises, wie sich ihre kleine Axe zur großen verhält. Hierdurch kann nun die Fläche der Ellipse leicht berechnet werden.

§. 425.

Zusatz. Die Fläche einer Ellipse sey = E, der Kreis mit ihrer halben großen Axe R beschrieben = K, und der mit der halben kleinen Axe r beschriebene Kreis = k, so ist (nach §. 424.)

$K : E = R : r$, und
$E : k = R : r$; folglich

$K : E = E : k$, und

$E = \sqrt{Kk}$, d. h. die Fläche der Ellipse ist die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den beyden mit ihren zwey halben Axen beschriebenen Kreisflächen.

§. 426.

Aufgabe. Bey rechtwinkeligen Coordinaten den Inhalt einer hyperbolischen Fläche zu finden.

Auflösung. Wenn der hyperbolische Raum BPM (Fig. 89.) bestimmt werden soll, so sey die Axe $AB = 2a$, der Parameter $= p$, die Absciße $CP = x$, die Ordinate $PM = y$; so ist die Gleichung für die Hyperbel $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2)$ (§. 229 u. 228) oder $2ay^2 = px^2 - a^2p$;

folglich $\frac{2ay^2 + a^2p}{p} = x^2$, und $x = \sqrt{\left(\frac{2ay^2 + a^2p}{p}\right)}$

Nun sey pm unendlich nahe bey PM, und MD, md, mR mit PC gleichlaufend gezogen; so ist $Dd = MR = dy$,

und $MDdR = xdy = dy . \sqrt{\left(\frac{2ay^2 + a^2p}{p}\right)}$. Da die in diesem Ausdrucke enthaltenen beständigen Größen den Gang der Rechnung nicht verändern, so soll die Hyperbel, der Einfachheit wegen, eine gleichseitige (§. 251.) seyn. Hier ist nun $2a = p$ (§. 252, I.), und es wird jetzt $xdy = dy . \sqrt{(a^2 + y^2)}$. Verwandelt man diese Wurzelgröße in eine unendliche Reihe, und multiplicirt jedes Glied darin mit dy; so ist $dy \sqrt{(a^2 + y^2)} = ady + \frac{y^2dy}{2a}$

$$+\frac{1 . y^4 dy}{2 . 4 . a^3}+\frac{1 . 3 . y^6 dy}{2 . 4 . 6 . a^5}+\frac{1 . 3 . 5 . y^8 dy}{2 . 4 . 6 . 8 . a^7}+\frac{1 . 3 . 5 . 7 . y^{10} dy}{2 . 4 . 6 . 8 . 10 . a^9}+\frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . y^{12} dy}{2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . a^{11}} \ldots\ldots$$

Dieses integrirt, giebt den Raum $MDCB = ay + \frac{y^3}{2 . 3 . a}$

$$+\frac{1 . y^5}{2 . 4 . 5 . a^3}+\frac{1 . 3 . y^7}{2 . 4 . 6 . 7 . a^5}+\frac{1 . 3 . 5 . y^9}{2 . 4 . 6 . 8 . 9 . a^7}+\frac{1 . 3 . 5 . 7 . y^{11}}{2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 11 . a^9}+\frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . y^{13}}{2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 13 . a^{11}} \ldots$$

Da nun MDCB vom Rechtecke MDCP weggenommen, den Raum MBP übrig läßt; so ist dieser hierdurch auch bestimmt.

§. 427.

Aufgabe. Die hyperbolische Ebene zwischen der Asymptote zu quadriren.

Auflösung. Es sey DMQ (Fig. 90.) ein hyperbolischer Bogen, AR dessen Asymptote, und MP, QR, zwey darauf lothrechte Ordinaten. Die Ebene MPRQ soll quadrirt werden. Hier sey P der Anfangspunct der Abscissen, die beständige Linie AP sey $= b$, die Potenz der Hyperbel $CD^2 = a^2$, $PR = x$, $RQ = y$; so ist, nach der Natur der Hyperbel (§. 248.), $by + xy = a^2$, folglich $y = \frac{a^2}{b + x}$, und das Flächendifferential $QRpm = ydx = \frac{a^2 dx}{b + x}$. Dividirt man nun hier wirklich mit $b + x$ in $a^2 dx$ (nach §. 422.), so entstehet die unendliche Reihe

$$\frac{a^2dx}{b} - \frac{a^2xdx}{b^2} + \frac{a^2x^2dx}{b^3} - \frac{a^2x^3dx}{b^4} + \frac{a^2x^4dx}{b^5} - \frac{a^2x^5dx}{b^6} \ldots\ldots$$

Wird hierin jedes einzelne Glied gehörig integrirt, so wird

$$MPRQ = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \frac{a^2x^5}{5b^5} - \frac{a^2x^6}{6b^6} \ldots\ldots$$

III. Anwendung der Integralrechnung auf die Rectification der Curven.

§. 428.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für das Differential der Curven zu finden.

Auflösung. In der willkührlichen Curve BmM (Fig. 89.) seyen Bp und pm lothrechte Coordinaten; so ist, wenn pP = dx gesetzt, PM gleichlaufend mit pm, und mR gleichlaufend mit BP gezogen wird, mR = dx, und MR = dy. Wegen der Kleinheit des Bogens Mm kann das Dreyeck MRm als ein geradliniges angesehen werden, worin $Mm^2 = MR^2 + Rm^2$. Folglich wird das Element der Curve MmB, oder $Mm = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, und der verlangte Ausdruck ist gefunden.

§. 429.

Aufgabe. Eine allgemeine Vorschrift zur Rectification der Curven, vermittelst der Integralrechnung, zu geben.

Auflösung. 1.) Man bestimme in dem allgemeinen Ausdrucke $\sqrt{(dx^2 + dy)}$ den Werth von dx^2 oder von dy^2 aus der Natur der zu rectificirenden Curve.

2.) Wird der nun erhaltene Ausdruck integrirt, so ist das entstehende Integral der Werth der zu rectificirenden krummen Linie.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruhet wieder auf den Begriffen von Differential- und Integralgrößen, und folgende Aufgaben werden noch mehr Licht darüber verbreiten.

§. 430.

Aufgabe. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreyecks durch Integralrechnung zu bestimmen.

Auflösung. Wenn in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADC (Fig. 81.) die Hypotenuse AC bestimmt werden soll, so setze man $AD = a$, $DC = b$, $Am = x$, $mg = dx$, $mn = y$; so ist, wenn nq lothrecht auf gl gezogen wird, $gl = dy$. Da nun nl ein Element der Hypotenuse ist, so wird $nl = \sqrt{(nq^2 + ql^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Nun muß der Werth von dy aus der Natur der Linie AC bestimmt werden. Es ist nämlich $AD : DC = Am : mn$, oder auch $a : b = x : y$, folglich $y = \frac{bx}{a}$; daher denn $dy = \frac{b}{a} dx$, und $dy^2 = \frac{b^2}{a^2} dx^2$. Folglich hat man $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{b^2}{a^2} dx^2 = \frac{(a^2 + b^2)\, dx^2}{a^2}$, und $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}\, dx}{a}$. Wird nun dieser letzte Ausdruck integrirt, so ist $An = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}\, x}{a}$.

Setzt man endlich $x = a = AD$; so wird $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(AD^2 + DC^2)}$, wie dieses aus der niedern Geometrie bekannt ist.

§. 431.

Aufgabe. Die Kreislinie zu rectificiren, wenn die Abscissen aus dem Mittelpuncte genommen werden.

Auflösung. Es sey in dem Quadranten BCA (Fig. 91.) der Radius $CA = CB = r$, $CD = FE = x$, $DG = JH = dx$, $DE = CF = y$, und $JE = KF = dy$; so ist das Element $EH = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Wird nun $CE = r$ gezogen, so ist $DE^2 = y^2 = r^2 - x^2$, folglich $dy^2 = dr^2 - dx^2$, oder $2ydy = -2xdx$, d. h. $ydy = -xdx$. Wird beyderseits quadrirt, so ist $y^2dy^2 = x^2dx^2$, und $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2} = \frac{x^2dx^2}{r^2-x^2}$.

Folglich wird nun $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^2dx^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2dx^2}{r^2-x^2}$, und das Element der Kreislinie $EH =$

$$\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2}{r^2-x^2}\right)} = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = rdx \cdot (r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Um diesen Werth zu integriren, muß er, durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes, in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Dies giebt

$$rdx \left\{ r^{-1} - \frac{r^{-3} \cdot -x^2}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot r^{-5} \cdot x^4}{1 \cdot 2} - \right.$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5r^{-7}}{2} \cdot -x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}\cdot-\frac{7}{2}\cdot r^{-9}\cdot x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \text{u. s. w.}\Bigg\}$$

Oder wenn die Division mit r wirklich ausgeführt wird,

$$dx\left(1+\frac{x^2}{2r^2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2\cdot 4\cdot r^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}\ \text{u. s. w.}\right)$$

Nun integrire man jedes Glied dieser Reihe, so wird

$$S\frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=x+\frac{x^3}{2\cdot 3\cdot r^2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot r^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot r^6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot r^8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot x^{11}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot r^{10}}\ \ldots\ldots$$

Dieses ist der Ausdruck für die Größe des Bogens BE.

Wird nun der Winkel BCE $= 30^\circ$ genommen, so ist EF $=$ sin. $30^\circ = \frac{1}{2}r$; oder $x=\frac{r}{2}$. Setzt man $r=\frac{1}{2}$ so ist $x=\frac{1}{4}$, und $\frac{x^3}{r^2}=\frac{1}{4^2}$; ferner $\frac{x^5}{r^4}=\frac{1}{4^3}$ $\frac{x^7}{r^6}=\frac{1}{4^4}$. Daher erhält man für den zwölften Theil des Umkreises folgende Reihe:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 4^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 4^4}\ \ldots\ldots\right)=R.$$

Daher ist die ganze Peripherie oder p $= 12 \times$ R, oder:

$$3 + \frac{1}{2\,.\,4} + \frac{1\,.\,3\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5\,.\,4^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7\,.\,4^3}$$
$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,9\,.\,4^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,11\,.\,4^5} \ldots$$

Erläuterung. Wenn man die auf einander folgenden Glieder dieser Reihe A, B, C, D u. s. f. nennet, und ihren Werth auf 9 Decimalstellen berechnet, so erhält man Folgendes:

A	=	3,
B	=	0,125000000
C	=	0,014062500
D	=	0,002092633
E	=	0,000356038
F	=	0,000065543
G	=	0,000012709
H	=	0,000002556
J	=	0,000000528
K	=	0,000000111
L	=	0,000000023
M	=	0,000000005
N	=	0,000000001
Summe	=	3,141592647.

Wenn daher der Halbmesser des Kreises $= \frac{1}{2}$, oder sein Durchmesser = 1 ist, so wird dessen Umfang = 3,1415926.... Die beyden letzten Ziffern (47) sind hier unrichtig, würden sich aber, wenn man die Reihe weiter fortgesetzt hätte, in die richtigen Ziffern (53) verwandelt haben.

§. 432.

Aufgabe. Den Kreisumfang durch Hülfe einer Tangente zu rectificiren.

Auflösung. In dem Quadranten DCB (Fig. 92.) sey CB = CD = 1, die Tangente BO = x, ON = dx; so ist CO = $\sqrt{(1 + x^2)}$. Da nun die Dreyecke CBO und OTN ähnlich sind; so ist CO : CB = ON : OT, oder $\sqrt{(1 + x^2)} : 1 = dx : OT$, folglich OT = $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$. Da nun auch die Ausschnitte OCT und FCf ähnlich sind; so ist ferner CO : OT = CF : Ff, oder $\sqrt{(1 + x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : Ff$. Daher wird $Ff = \frac{dx}{1 + x^2}$. Diesen Bruch, durch wirkliche Division des Nenners in den Zähler, in eine unendliche Reihe verwandelt, giebt

$Ff = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx + \ldots$

Daher ist ihr Integral, oder Bogen $BF = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$ Nimmt man nun den Winkel BCO = 45°; so ist BO = tang. 45° = CB = 1 = x, und der achte Theil der Peripherie wird nun $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$, woraus die ganze Kreislinie $= 8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{5} - \frac{8}{7} + \frac{8}{9} - \frac{8}{11} + \frac{8}{13} - \ldots$ wird. Setzt man den Durchmesser = 1, so ist die Reihe für die Peripherie diese: $(4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \ldots) = R$.

§. 433.

Zusatz. Wenn man diese Reihe R (§. 432.) mit der oben (§. 422.) für den Inhalt des Kreises bey dem Durch-

messer = 1 gefundenen vergleichet, so erhellet, daß eine aus der andern sehr bequem abgeleitet werden kann. Denn da die Kreisfläche einem Producte aus der Peripherie in den vierten Theil des Durchmessers gleich ist, so muß die Reihe R (in §. 432.) mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, d. h. mit 4 dividirt werden, um die Reihe für den Flächenraum zu erhalten. Daß dies nun wirklich der Fall ist, lehret die sehr leichte Rechnung. Eben so müßte die Reihe für den Inhalt (im §. 422.) mit $\frac{1}{4}$ dividirt, d. h. mit 4 multiplicirt werden, um hieraus die Reihe R wieder zu erhalten.

§. 434.

Aufgabe. Einen parabolischen Bogen zu rectificiren.

Auflösung. Es sey der Parameter der Parabel = p, die Abscisse = x, die zugehörige Ordinate = y; so ist die Gleichung für die Parabel (§. 179.) $y^2 = px$. Dies differentiirt, giebt $2ydy = pdx$, folglich $dx = \frac{2ydy}{p}$, und $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Wird nun dieser Werth von dx^2 in die allgemeine Formel $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituirt, so ist das Element des parabolischen Bogens $= \sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2\right)} =$
$\sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2}\right)} = \frac{dy}{p}\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$.
Dieser Ausdruck in eine unendliche Reihe verwandelt, giebt $p + \frac{2y^2}{p} - \frac{2y^4}{p^3} + \frac{4y^6}{p^5} - \frac{10y^8}{p^7}$ u. s. f. Multiplicirt man jedes Glied mit $\frac{dy}{p}$, so entstehet die Reihe $dy + \frac{2y^2dy}{p^2} - \frac{2y^4dy}{p^4} + \frac{4y^6dy}{p^6} - \frac{10y^8dy}{p^8}$ u. s. w. Die

Integration jedes Gliedes giebt für den zu rectificirenden Bogen die Reihe $y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8}$ u. s. f.

§. 435.

Anmerkung. Wenn man in der ersten Differentialgleichung des vorigen §. den Werth von dy bestimmt, so wird $dy = \frac{pdx}{2y}$, und $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2} = \frac{p^2dx^2}{4px} = \frac{pdx^2}{4x}$. Diesen Werth in die allgemeine Formel $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ gesetzt, giebt das Element des Bogens $= \sqrt{\left(dx^2 + \frac{pdx^2}{4x}\right)}$ $= \sqrt{\left(\frac{4xdx^2 + pdx^2}{4x}\right)} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{(p + 4x)}$. Wird nun diese Wurzelgröße $\sqrt{(p + 4x)}$ in eine unendliche Reihe verwandelt, jedes Glied derselben mit $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ multiplicirt, und sodann integrirt, so entstehet für den parabolischen Bogen der nämliche Ausdruck, wie vorhin (§. 434.). Dies erläutert die Lehre von der Rectification der Curven, und ist eine lehrreiche Rechnung für Anfänger.

§. 436.

Anmerkung. Die Rectificationen der elliptischen und hyperbolischen Curven übergehen wir hier, weil sie auf etwas weitläufigere Rechnungen führen, und der Zweck dieser Elemente nur der ist, dem Anfänger eine allgemeine Einsicht in diese Methoden zu verschaffen, und seine Begierde zu tiefern Untersuchungen zu wecken.

IV. Anwendung der Integralrechnung auf die Cubirung der Körper.

§. 437.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für das Differential der Körper zu finden.

Auflösung. Es sey BmM (Fig. 89.) irgend eine Curve (oder auch wohl eine gerade Linie), BG ihre Axe, Bp eine beliebige Abscisse $= x$, pm die ihr zugehörige Ordinate $= y$, pP $=$ dx, und, nachdem mR gleichlaufend mit BG gezogen ist, MR $=$ dy. Denkt man sich nun, die Fläche MmBP drehe sich um die gerade Linie BP, als Axe, einmal ganz und gar herum; so beschreibt die Curve BmM eine krumme Fläche, die gerade Linie MP eine Kreisebene, und beyde Flächen zusammen, schließen einen körperlichen Raum ein. Ein Element dieses Körperraumes ist der unendlich kleine Cylinder, welcher von den Kreisebenen mit den Halbmessern pm und PM, und der durch die Umdrehung des Curvenstückchens mM erzeugten krummen Seitenfläche begrenzt wird. Der algebraische Ausdruck dieses Cylinders giebt das zu suchende Körperdifferential. Wenn man die Ludolphische Zahl π nennt, so ist πy^2 der Inhalt des Kreises mit dem Halbmesser pm. Da nun pP, die Höhe des Cylinders $=$ dx; so ist $\pi y^2 dx$ dessen Inhalt, und zugleich das Differential des Körpers, der durch Umdrehung der Ebene BmMP um BP entstanden ist. Daß dieser Ausdruck allgemein für jeden Körper gelte, folget aus seiner Ableitung.

§. 438.

Aufgabe. Eine allgemeine Anweisung zu geben, vermittelst der Integralrechnung die Körper zu cubiren.

Auflösung. 1.) Bestimme man aus der Natur des zu cubirenden Körpers den Werth der Ordinate y.

2.) Diesen setze man in die so eben gefundene allgemeine Formel $\pi y^2 dx$ (§. 437.).

3.) Wird nun das hieraus Erhaltene integrirt, so ist das Integral der Werth des zu bestimmenden Körpers.

§. 439.

Aufgabe. Den Inhalt des senkrechten Kegels durch die Integralrechnung zu finden.

Auflösung. Es sey BDA (Fig 93.) ein rechtwinkeliges Dreyeck, durch dessen Umdrehung um die Cathete BD der senkrechte Kegel erzeugt wird. Man setze BD $=$ a, DA $=$ b, BP $=$ x, Pp $=$ dx, PM $=$ y; so hat man, wegen der ähnlichen Dreyecken BPM und BDA, die Proportion BD : DA $=$ BP : PM, oder a : b $=$ x : $\frac{bx}{a} = y$; folglich ist $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Substituirt man nun diesen Werth von y^2 in die allgemeine Formel $\pi y^2 dx$ (§. 437.), so entstehet $\frac{\pi b^2 x^2 dx}{a^2}$. Wird dieses integrirt, so erhält man das Kegelstück, welches von dem unbestimmten Dreyeck BPM durch Umdrehung um die unbestimmte Cathete BP entstehet. Dies giebt $S \frac{\pi b^2 x^2 dx}{a^2} = \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}$. Setzt man aber diese unbestimmte BP $=$ BD, d. h. $x = a$, so wird der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{\pi b^2 a}{3}$ $= \frac{a}{3} \cdot \pi b^2$, d. h. dieser Inhalt ist einem Producte aus dem dritten Theile der Höhe des Kegels in seine Grundfläche gleich; wie auch aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 440.

Aufgabe. Den Inhalt der Kugel durch Integralrechnung zu finden.

Auflösung. Wenn der Halbkreis BMD (Fig. 94.) um den Durchmesser BD, als Axe, einmal ganz herumgedreht wird, so entsteht der körperliche Raum der Kugel. Nun sey wieder BP $= x$, Pp $= dx$, PM $= y$, BD $= 2r$; so ist, aus der Natur der Kreises (§. 171.) $y^2 = 2rx - x^2$. Setzt man diesen Werth für y^2 in die Formel $\pi y^2 dx$, so erhält man nun $\pi(2rx - x^2)\, dx = \pi(2rxdx - x^2 dx)$. Dies integrirt, giebt den durch BP bestimmten Kugelabschnitt $= \pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$. Setzt man nun ferner $x = 2r$, so wird der Inhalt der ganzen Kugel $= \pi\left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right)$ $= \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r$, d. h. $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Grundfläche die Fläche des größten Kreises der Kugel, dessen Höhe aber ihr Durchmesser ist, wie in der Geometrie erwiesen wird.

§. 441.

Zusatz. Die Formel $\pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ (§. 440.) dienet auch dazu, um jeden beliebigen Kugelabschnitt zu bestimmen. Sollte man z. B. (Fig. 94.) den Inhalt des Abschnitts finden, der durch das Herumbewegen der Fläche BPMB um die Axenlinie BP entstehet; so ist hier BP $= x$, und man darf nur diesen Werth von x in obige Formel setzen. Die Richtigkeit derselben erhellet, aus Gründen der Stereometrie, auf folgende Weise. Wenn man von dem durch Herumdrehen des Rechtecks ABPO um BP entstehenden

Cylinder ($= C$) den durch ähnliches Herumbewegen des Paralleltrapez *ABPN* erzeugten abgekürzten Kegel ($= k$) abzieht; so bleibt der zu berechnende Kugelabschnitt ($= A$) übrig. Nun ist aber bekannt, daß $C = \pi r^2 x$; auch ist $k = \frac{1}{3} x \pi [r^2 + r . (r - x) + (r - x)^2] = \frac{1}{3} x \pi (3r^2 - 3rx + x^2) = \pi r^2 x - \pi r x^2 + \frac{\pi x^3}{3}$. Daher denn $C - K = A = \pi r x^2 - \frac{\pi x^3}{3} = \pi \left(r x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$ wie vorhin.

§. 442.

Erklärung. Wenn (Fig. 93.) *BD* und DA senkrechte Coordinaten sind, und *BMA* ein Stück einer parabolischen Curve wäre; so heißt der Körper, welcher durch Herumbewegen der Ebene *BDAB* um die Abscisse *BD*, als unbewegliche Axe, erzeugt wird, ein parabolischer Kegel. Wäre *BMA* ein Schenkel der Hyperbel, so entstände ein hyperbolischer Kegel.

§. 443.

Aufgabe. Den Inhalt eines parabolischen Kegels durch Integralrechnung zu finden.

Auflösung. Dieser Inhalt wird gefunden, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke für das körperliche Element, nämlich in $\pi y^2 dx$ (§. 437.) den Werth für y^2 aus der Natur der Parabel bestimmt. Wenn p der Parameter heißt, so ist $y^2 = px$ (§. 179.); folglich das Differential des Kegels $= \pi p x dx$. Dies integrirt, giebt $\frac{\pi p x^2}{2} =$

$\pi y^2 \cdot \frac{x}{2}$. Nimmt man nun die Axe dieses Kegels $= h$, den Halbmesser seiner Grundfläche $= r$; so ist dessen Inhalt $= \pi r^2 \cdot \frac{h}{2}$. Oder: man findet den Inhalt eines senkrecht parabolischen Kegels, wenn man dessen Grundfläche mit der halben Höhe multiplicirt.

§. 444.

Zusatz. I. Wird über dieses parabolischen Kegels Grundfläche ein senkrechter Cylinder von der nämlichen Höhe construiret, so ist dessen Inhalt $= \pi r^2 \cdot h$. Folglich ist der parabolische Kegel die Hälfte dieses Cylinders.

II. Des gewöhnlichen Kegels, von gleicher Grundfläche und Höhe, Inhalt ist $= \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$; folglich verhält sich hier der gemeine Kegel zu dem parabolischen $= \frac{h}{3} : \frac{h}{2} = 2 : 3$, d. h. dieser ist anderthalbmal so groß, als jener.

§. 445.

Aufgabe. Eines hyperbolischen Kegels Inhalt zu finden.

Auflösung. Wenn aus der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 225.) dieser Werth von y^2 in die Formel $\pi y^2 dx$ gesetzt wird; so erhält man das Körperdifferential des Kegels $= \pi\left(pxdx + \frac{px^2dx}{a}\right)$, welches

integrirt, den Ausdruck $\pi\left(\frac{px^2}{2} + \frac{px^3}{3a}\right)$ giebt. Wird nun die Höhe des hyperbolischen Kegels $= h$ gesetzt, so ist dessen Inhalt $= \pi\left(\frac{ph^2}{2} + \frac{ph^3}{3a}\right)$. In dieser Gleichung bedeutet p den Parameter, und a die Axe der Hyperbel.

§. 446.

Erklärung. Wenn sich eine Ellipse um eine ihrer Axen einmal ganz und gar herumbeweget, so heißt der hierdurch entstandene Körper ein elliptisches Sphäroid.

§. 447.

Aufgabe. Den Inhalt eines elliptischen Sphäroids zu bestimmen.

Auflösung. Es sey die große Axe der Ellipse $= a$, die kleine $= \alpha$, und der Körper, welcher aus Umdrehung derselben um a entstehet, soll cubirt werden. Da in der Ellipse $y^2 = \alpha^2 \times \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)$ ist (§. 199.), so wird das allgemeine Körperdifferential, oder $\pi y^2 dx$, nun in folgendes $\pi\alpha^2\left(\frac{xdx}{a} - \frac{x^2dx}{a^2}\right)$ verwandelt. Dieses integrirt, giebt $\pi\alpha^2\left(\frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2}\right)$. Für $x = a$, wird dieser Ausdruck $= \pi\alpha^2\left(\frac{a^2}{2a} - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \pi\alpha^2\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{a}{6}$.

Nimmt man nun die halbe kleine Axe, oder $\frac{\alpha}{2} = r$; so

ist $\alpha = 2r$, $\alpha^2 = 4r^2$, und der Inhalt des Sphäroides wird $= \pi r^2 \cdot \frac{4a}{6} = \pi r^2 \cdot \frac{2}{3} a$.

§. 448.

Zusatz. I. Da der um dieses Sphäroid zu beschreibende Cylinder $= \pi r^2 . a$ ist; so verhält sich jenes zu diesem, wie $\pi r^2 \cdot \frac{2}{3} a : \pi r^2 . a$, d. h. wie $\frac{2}{3} : 1$, oder wie $2 : 3$.

II. Der Inhalt der um die kleine Axe, als Durchmesser, beschriebenen Kugel ist $= \frac{4}{3} \pi r^3$. Folglich verhält sich diese Kugel zu dem elliptischen Sphäroide $= \frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{2}{3} \pi r^2 a = 2r^3 : r^2 a = 2r : a$, d. h. wie $\alpha : a$, oder wie die kleine Axe der Ellipse zur großen.

III. Der Körperinhalt der Kugel, deren Durchmesser die große Axe ist, wird $= \frac{\pi a^3}{6}$. Folglich verhält sich diese Kugel zum Sphäroide $= \frac{\pi a^3}{6} : \frac{2}{3} \pi a r^2 = \frac{\pi a^3}{6} : \frac{4\pi a r^2}{6} = a^2 : 4r^2 = a^2 : \alpha^2$, d. h. wie das Quadrat der großen Axe zu dem Quadrate der kleinen Axe der Ellipse.

V. Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung der Oberflächen der Körper.

§. 449.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für das Differential der Oberflächen der Körper zu finden.

Auflösung. Wenn die Curve BmM (Fig. 89.) durch Umdrehung um ihre Axe BG, einen Körper erzeuget; so ist dieser von dem Kreise mit dem Halbmesser MP, und einer von BmM entstandenen krummen Fläche eingeschlossen. Das Element der Curve, oder mM, beschreibet hiebey ein Element der Oberfläche, welches als ein unendlich schmales Stück von der Oberfläche eines senkrechten Cylinders angesehen werden kann. Sein Flächeninhalt wird gefunden, wenn man dieses mM mit dem Umfange des mit dem Halbmesser mp beschriebenen Kreises multiplicirt. Da nun mM $= \sqrt{}(dx^2 + dy^2)$ (§. 428.), die Peripherie mit dem Halbmesser mp aber $= 2y\pi$; so wird jenes allgemeine Flächenelement $= 2y\pi . \sqrt{}(dx^2 + dy^2)$.

§ 450.

Aufgabe. Die Oberflächen der Körper durch Hülfe der Integralrechnung zu bestimmen.

Auflösung. 1.) Bestimme man aus der Natur der den Körper erzeugenden Ebene den Werth von y.

2.) Diesen setze man in die allgemeine Formel (§. 449.) des Oberflächen-Differentials $= 2y\pi . \sqrt{}(dx^2 + dy^2)$.

3.) Integrirt man nun das hieraus Entsprungene, so entstehet der Werth der zu findenden Oberfläche.

§. 451.

Aufgabe. Die Oberfläche des senkrechten Kegels durch Integralrechnung zu finden.

Auflösung. Setzt man hier alles, wie oben (§. 439.), so ist (Fig. 93.) $PM = y = \frac{bx}{a}$; folglich $dy = \frac{bdx}{a}$, und $dy^2 = \frac{b^2dx^2}{a^2}$. Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Formel (§. 449.), so wird das Flächenelement $= \frac{2\pi bx}{a} \cdot \sqrt{\left(dx^2 + \frac{b^2dx^2}{a^2}\right)}$, oder $=$ $\frac{2\pi bx}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2dx^2 + b^2dx^2}{a^2}\right)} = \frac{2\pi bx}{a} \cdot \frac{dx}{a} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)}$ $= \frac{2\pi bxdx}{a^2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Dieses integrirt, giebt das Stück der noch unbestimmten Kegeloberfläche $=$ $\frac{\pi bx^2}{a^2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Wird nun, zur Bestimmung dieses Stücks, $x = a = BD$ gesetzt, so ist die nunmehr bestimmte Kegelfläche $= \pi b \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)} = \pi \cdot DA \cdot BA$, wie dieses auch aus der gewöhnlichen Geometrie bekannt ist.

§. 452.

Aufgabe. Die Oberfläche der Kugel zu finden.

Auflösung. Es sey hier alles, wie oben (§. 440.), so ist $PM^2 = y^2 = 2rx - x^2$; folglich $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$,

und $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$. Dieses giebt $dy^2 =$ $\frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}$. Dieses nun in die allgemeine Formel $2y\pi . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 449.) gesetzt, giebt das Element der Kugelfläche

$$= 2y\pi . \sqrt{\left(dx^2 + \frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}\right)} =$$

$$2y\pi . \sqrt{\left[\frac{2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}\right]} =$$

$$2y\pi . \sqrt{\left[\frac{r^2dx^2}{2rx - x^2}\right]} = 2y\pi . \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} =$$

$\frac{2\pi rydx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, oder, wenn man den Zähler und Nenner mit $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ dividirt, $= 2\pi rdx$; dessen Integral $= 2\pi rx$ ein unbestimmtes Stück der Kugelfläche darstellt. Für die ganze Kugelfläche wird nun $x = 2r$, und der Ausdruck ist hier $= 2\pi r . 2r = 4 . r^2\pi$. Da nun $r^2\pi$ den Inhalt des größten Kreises der Kugel darstellt, so gab die Integralrechnung das, schon aus der Stereometrie bekannte, Resultat: die Kugelfläche ist dem Vierfachen der Ebene ihres größten Kreises gleich.

§. 453.

Zusatz. I. Für die Oberfläche der halben Kugel setze man $x = r$ in dem vorigen Ausdruck (§. 452.) und diese Fläche ist $= 2\pi r^2$.

II. Es sey $x < r$, z. B. $x = BP$ (Fig. 94.) so wird das durch Umdrehung des Bogens BM erzeugte Stück der Kugelfläche $= 2\pi r . BP$. Da nun $2r\pi$ dem Umfange des größten Kugelkreises gleich ist, so wird die Oberfläche des durch

BP bestimmten Kugelabschnitts gefunden, wenn man die Peripherie des größten Kreises mit der Höhe dieses Abschnitts multiplicirt. In der Geometrie wird bewiesen, daß diese Oberfläche der Ebene des Kreises mit dem Halbmesser BM (wenn man sich diese gerade Linie gezogen denket) gleich ist. Die Identität beyder Ausdrücke ergiebt sich leicht. Denn, wenn man sich eine gerade Linie MD denket, so ist $\triangle$ BMD $\backsim$ $\triangle$ BPM, und BD : BM = BM : BP, folglich $BM^2 = BD \times BP$, und $BM^2\pi = \pi BD \times BP = 2r\pi \times BP$, wie vorhin.

§. 454.

Aufgabe. Die Kugelfläche auf andere Art, vermittelst der Integralrechnung, zu finden.

Auflösung. Es sey (Fig. 95.) die Abscisse AP = x, die Ordinate PM = y, Pp = dx, CM = r; so wird, wenn pm und MR gezogen sind, auch MR = dx, und Rm = dy. Da nun auch $\triangle$ MRm $\backsim$ $\triangle$ CPM; so ist PM : MC = MR : Mm, d. h. $y : r = dx : \frac{r.dx}{y}$ = Mm. Wird nun diese Mm mit der durch den Halbmesser PM beschriebenen Peripherie $= \pi 2y$ multiplicirt; so drücket das Product $\frac{r.dx}{y} \times \pi 2y$ das Element der Kugelfläche aus. Dies reducirt und integrirt, giebt für die Oberfläche des Abschnittes den Werth $2r\pi x$, und, wenn x = 2r gesetzt wird, die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$, wie vorhin (§. 452.)

§. 455.

Aufgabe. Die Oberfläche der Kugel zu finden, wenn man die Abscissen aus dem Mittelpuncte nimmt.

Auflösung. Es sey (Fig. 95.) $CP = x$, $PM = y$, $CA = r$; so ist $y^2 = r^2 - x^2$ (§. 176.) und differentiirt $2ydy = -2xdx$; folglich $dy = \frac{-2xdx}{2y}$ und $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2} = \frac{x^2dx^2}{r^2-x^2}$. Setzt man den Werth in die allgemeine Formel $2y\pi . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 449.), so wird das Flächenelement $= 2y\pi . \sqrt{\left[dx^2 + \frac{x^2dx^2}{r^2-x^2}\right]} = 2y\pi . \sqrt{\left[\frac{r^2dx^2}{r^2-x^2}\right]} = \frac{2y\pi rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{2y\pi rdx}{y} = 2\pi rdx$, welches integrirt $= 2\pi rx$ wird, und, für $x = 2r$, die ganze Kugelfläche $= 4r^2\pi$ giebt, wie oben (§. 452 und 454.).

§. 456.

Zusatz. I. Es sey der Halbmesser der Kugel, oder CA in eine unendliche Menge kleiner Theilchen getheilt, und von dem Mittelpuncte aus seyen nach der Oberfläche hin unzählig viele Kugelflächen beschrieben; so läßt sich der Inhalt der Kugel als die Summe unendlich vieler Körper ansehen, deren jeder von je zwey dieser Kugelflächen begrenzt ist. Für den Halbmesser $= x$ wird jede dazu gehörige Kugelfläche $= 4x^2\pi$ (§. 455.), folglich der zwischen je zwey Kugelflächen enthaltene Körperraum $= 4x^2\pi dx$. Dieses integrirt, giebt $\frac{4x^3\pi}{3}$. Daher wird, für $x = r$, der ganze Körperraum der Kugel $\frac{4\pi r^3}{3} = 4\pi r^2 . \frac{r}{3}$, d. h. einem Producte aus der Oberfläche der Kugel in den dritten Theil des Halbmessers, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Bayerische Staatsbibliothek München

II. Wenn man sich ein unendlich kleines (z. B. viereckiges) Stückchen der Kugeloberfläche, d. h. ein Differential derselben, denkt, und aus dem Mittelpuncte gerade Linien nach dessen Endpuncten vorstellet; so ist die ganze Kugel eine Summe dieser unzählig vielen Pyramiden. Die Grundfläche eines dieser Pyramidchen ist also $= d(4x^2\pi) = 8x\pi dx$, und sein Inhalt $= 8x\pi dx \times \frac{r}{3} = \frac{8r\pi x dx}{3}$. Dies integrirt, giebt $\frac{8r\pi x^2}{6} = \frac{4r\pi x^2}{3}$. Für $x = r$, wird die Kugel $= 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3}$, wie vorhin (in I.).

Schlußwort.

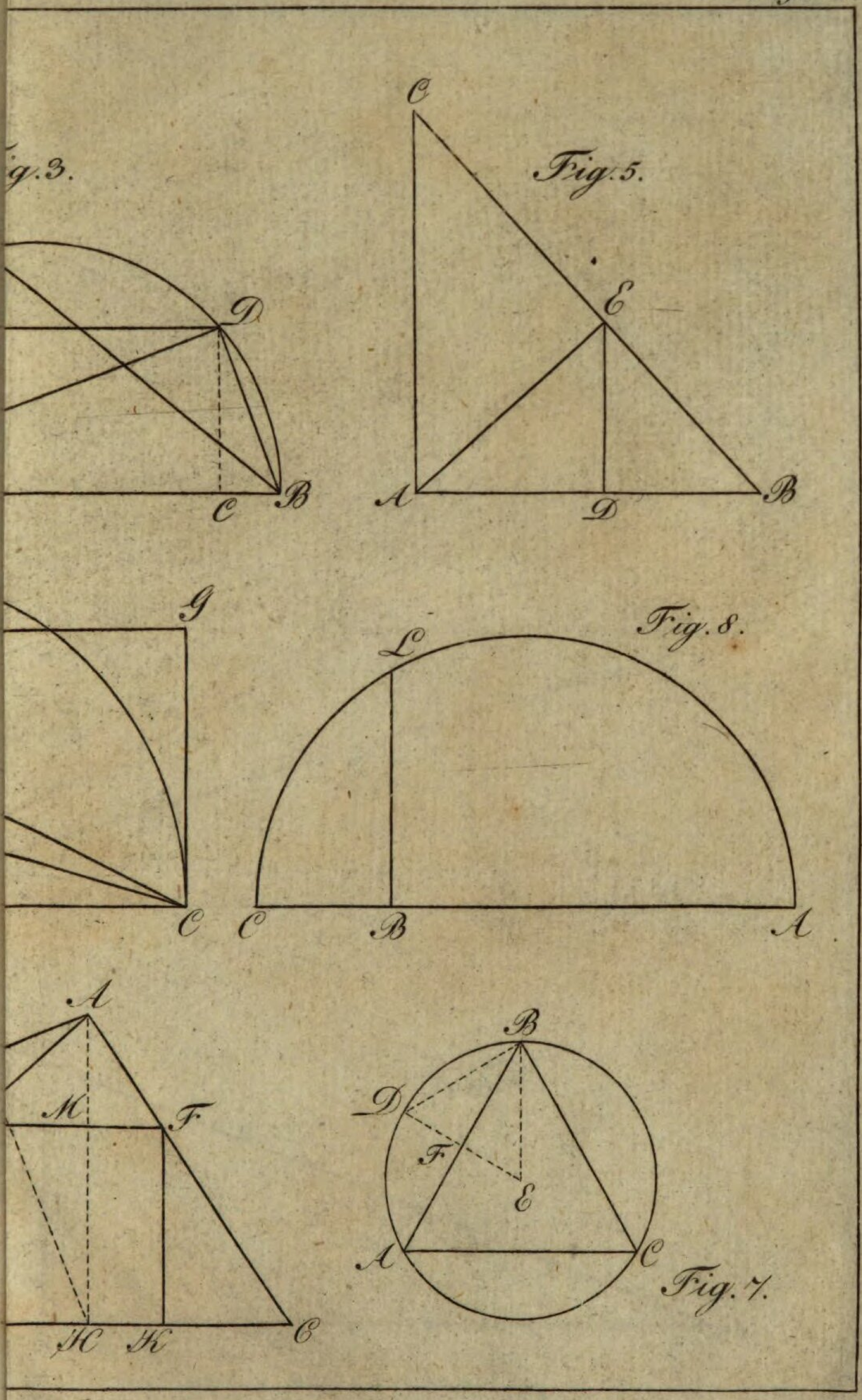
Wenn der Anfänger, unter Leitung eines sachkundigen Lehrers, oder durch thätigen Privatfleiß, diese Grundlehren sich zu eigen gemacht hat, so ist er zum Studium größerer Werke über die Algebra, höhere Geometrie und die Infinitesimalrechnung gehörig vorbereitet. Es wird ihm dann nicht schwer fallen, seine Kenntnisse nach Wunsch zu erweitern, wozu die Schriften von Euler, Kästner, Klügel, Lacroix, Lagrange, l'Huilier, Pasquich, Textor, Thibaut, u. a. treffliche Anleitung geben.

Druckfehler.

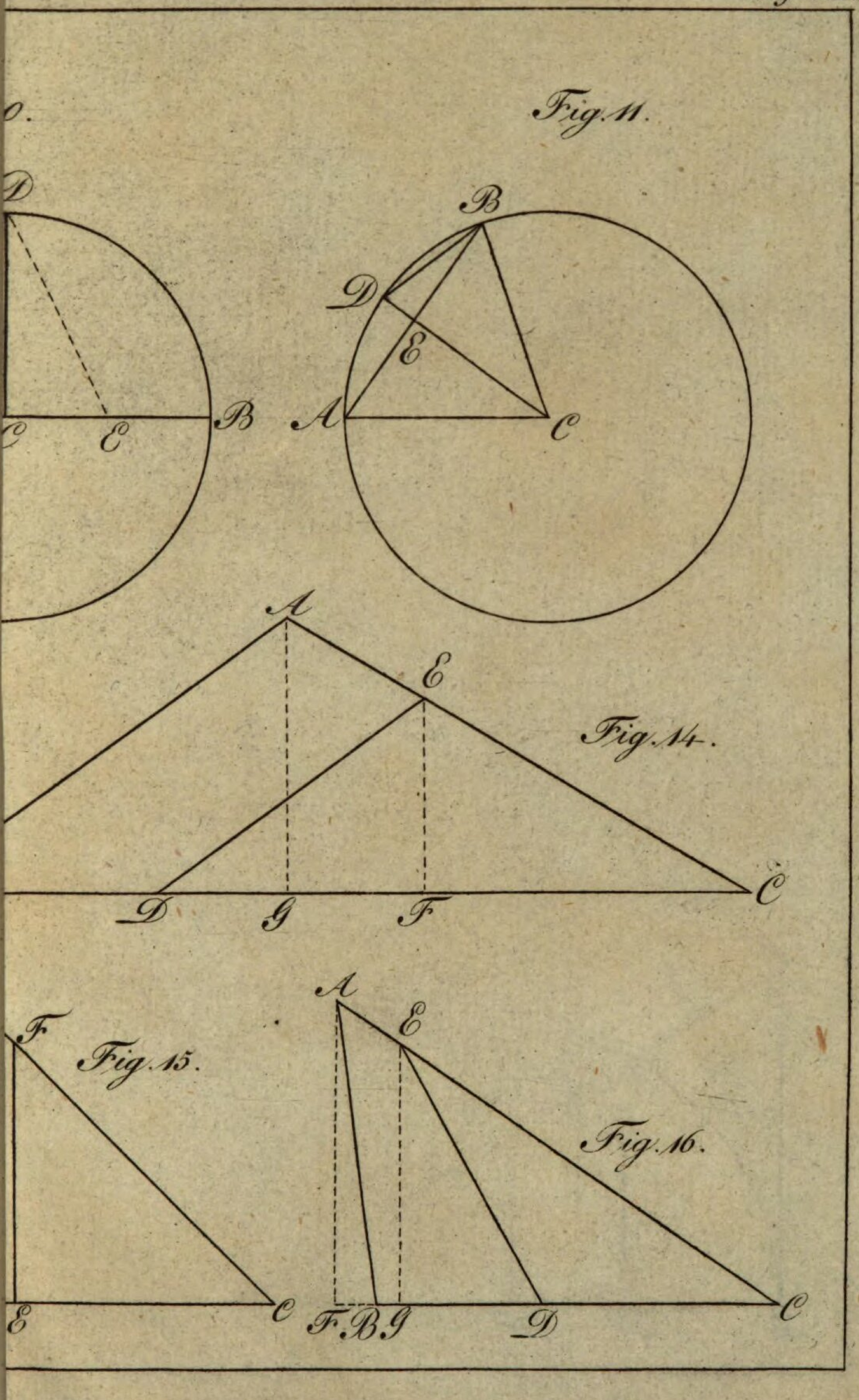
S. 5. Z. 2. v. o. st. abdiren, l. addiren.
— 21. — 1. v. o. st. $b^2 + c^3$ l. $b^2 \times c^3$
Das. — 11. v. o. st. $(a)^{23}$ l. $(a^2)^3$
— 93. — 10. v. u. st. dem l. der
— 107. — 14. v. o. st. DH l. DC.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tafel I.

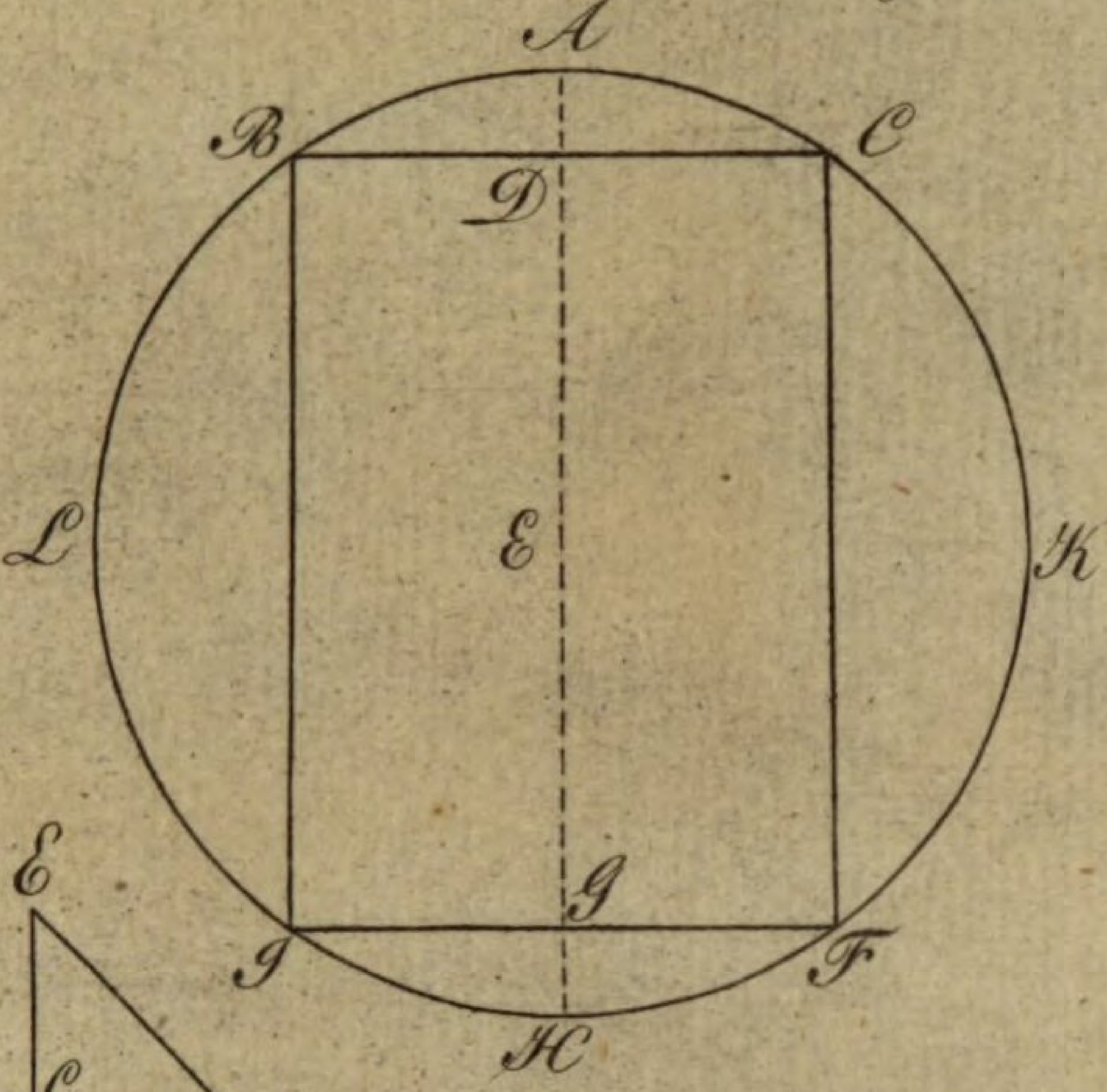


Tafel II.



g. 18.

Fig. 19.



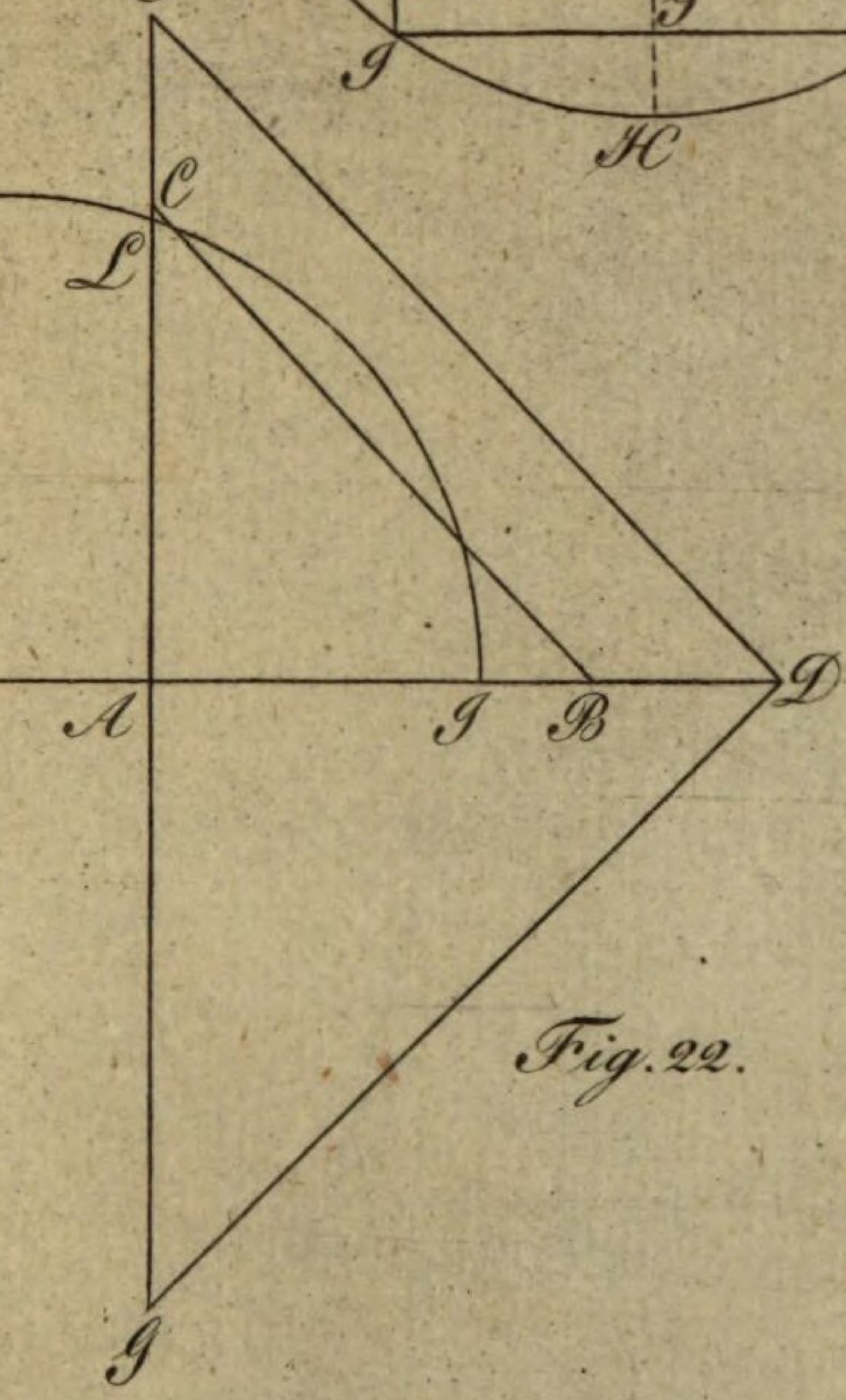


Fig. 22.

ig. 21.

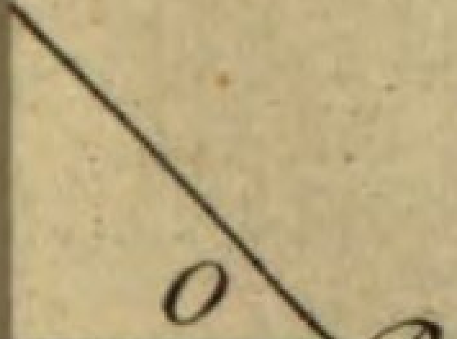


Fig. 24.

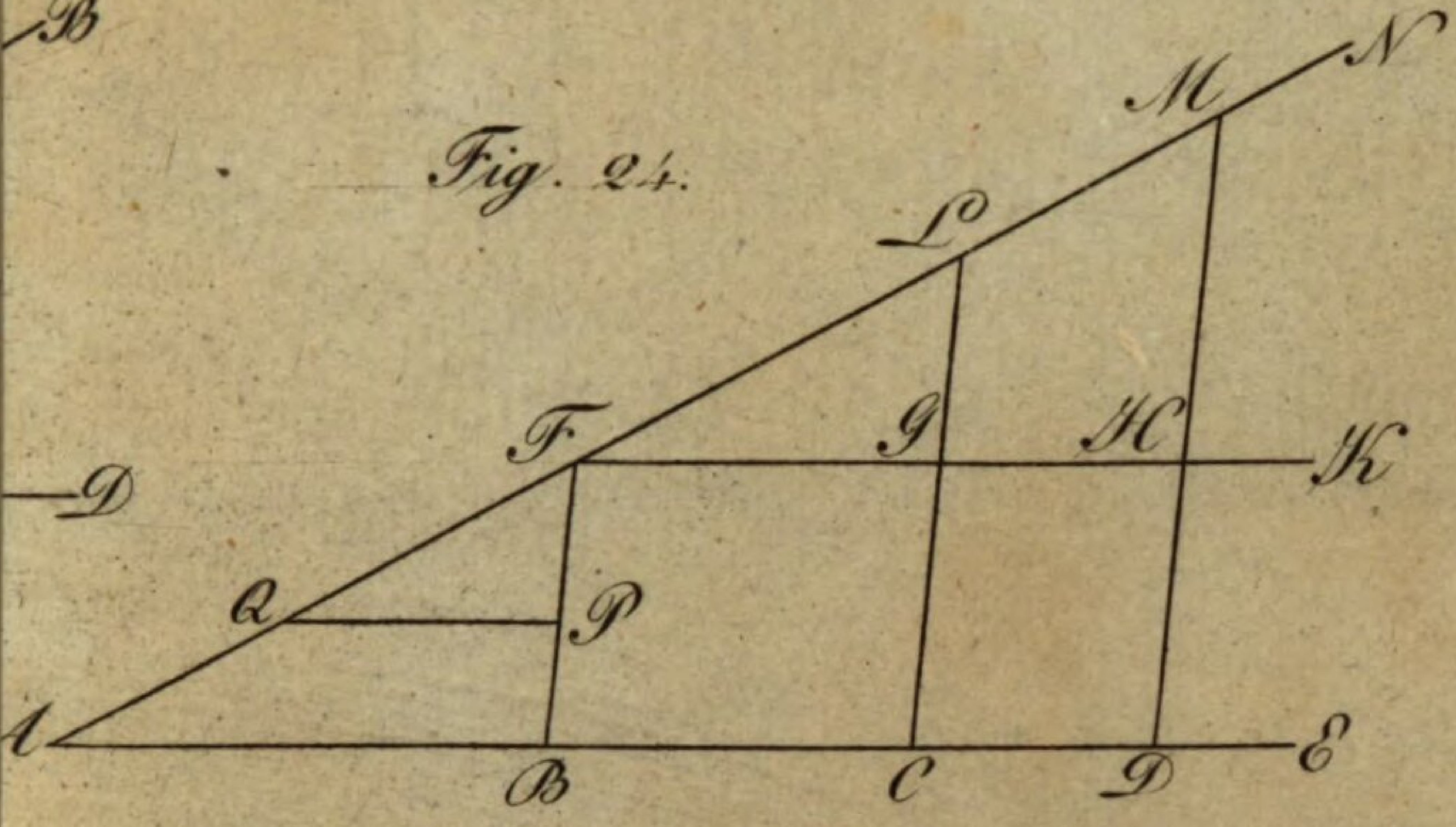
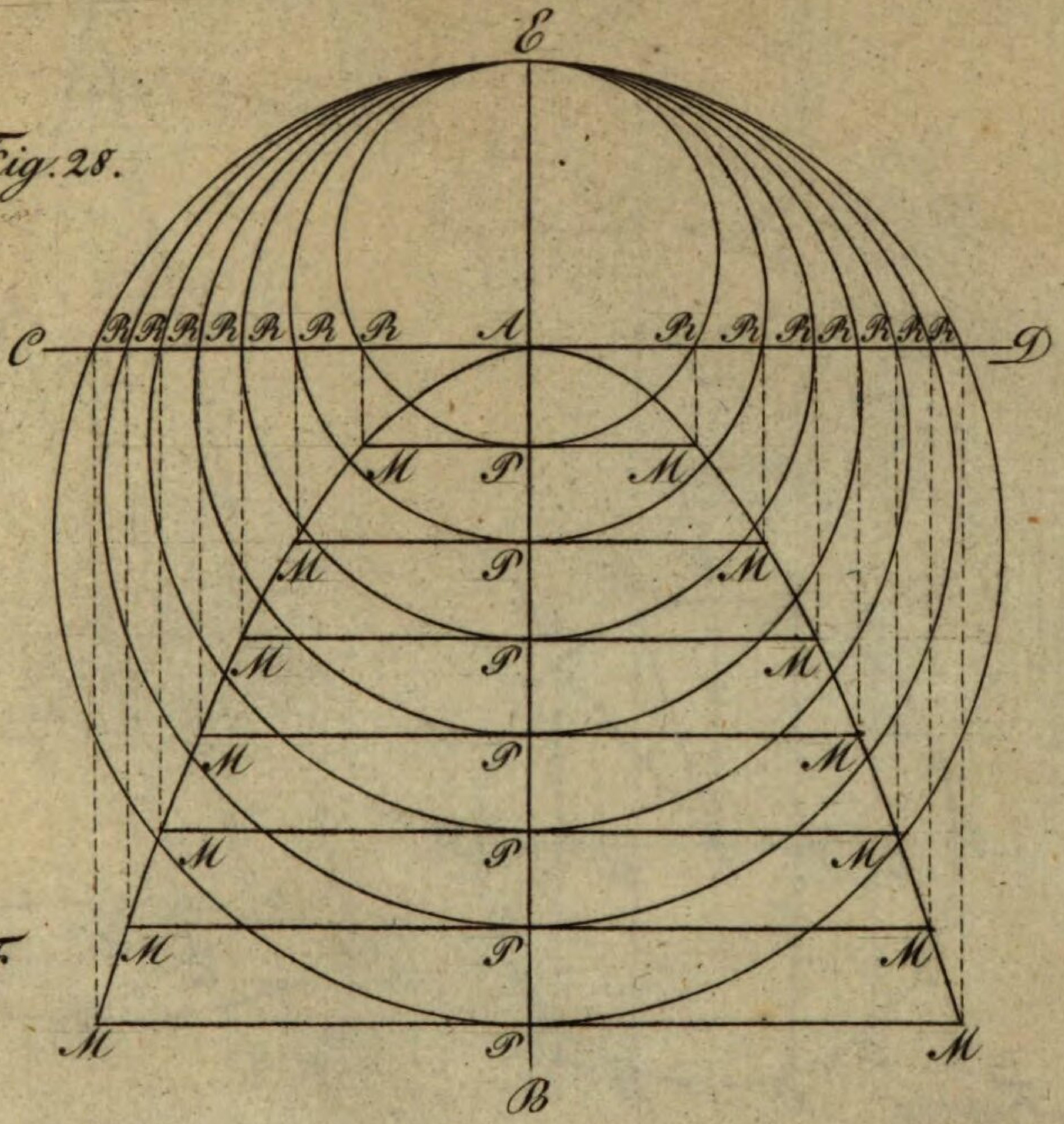


Fig. 28.



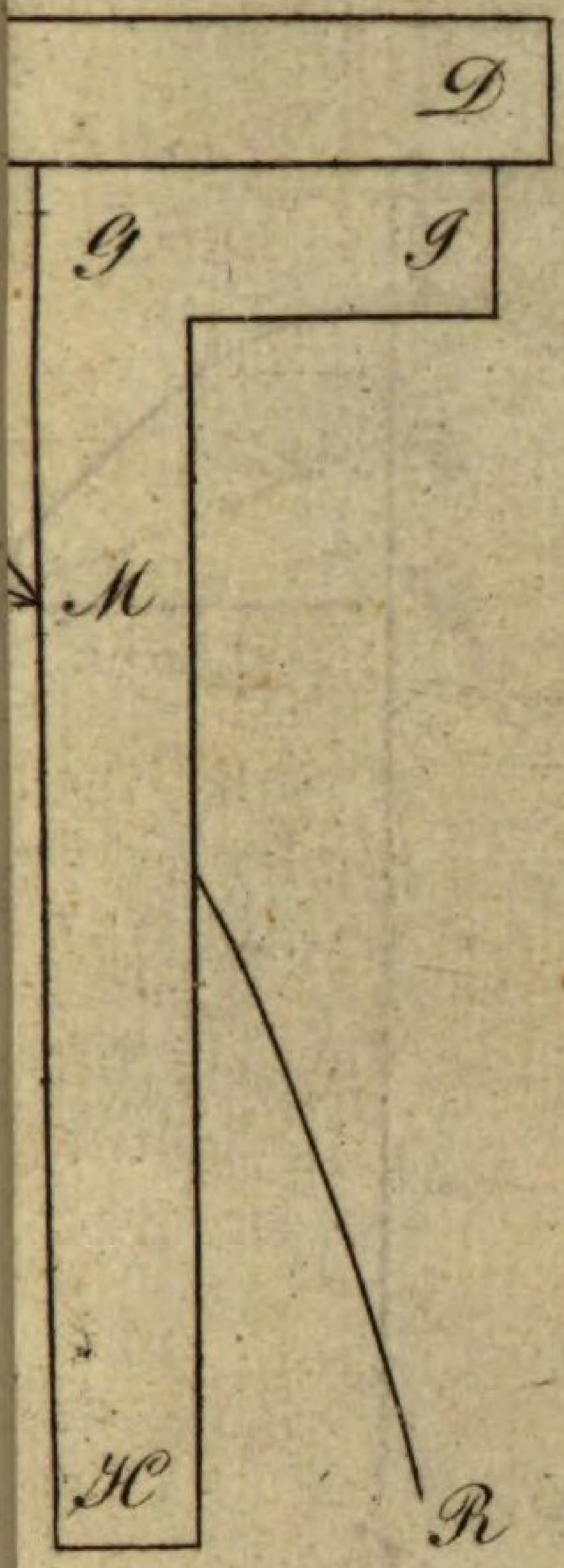
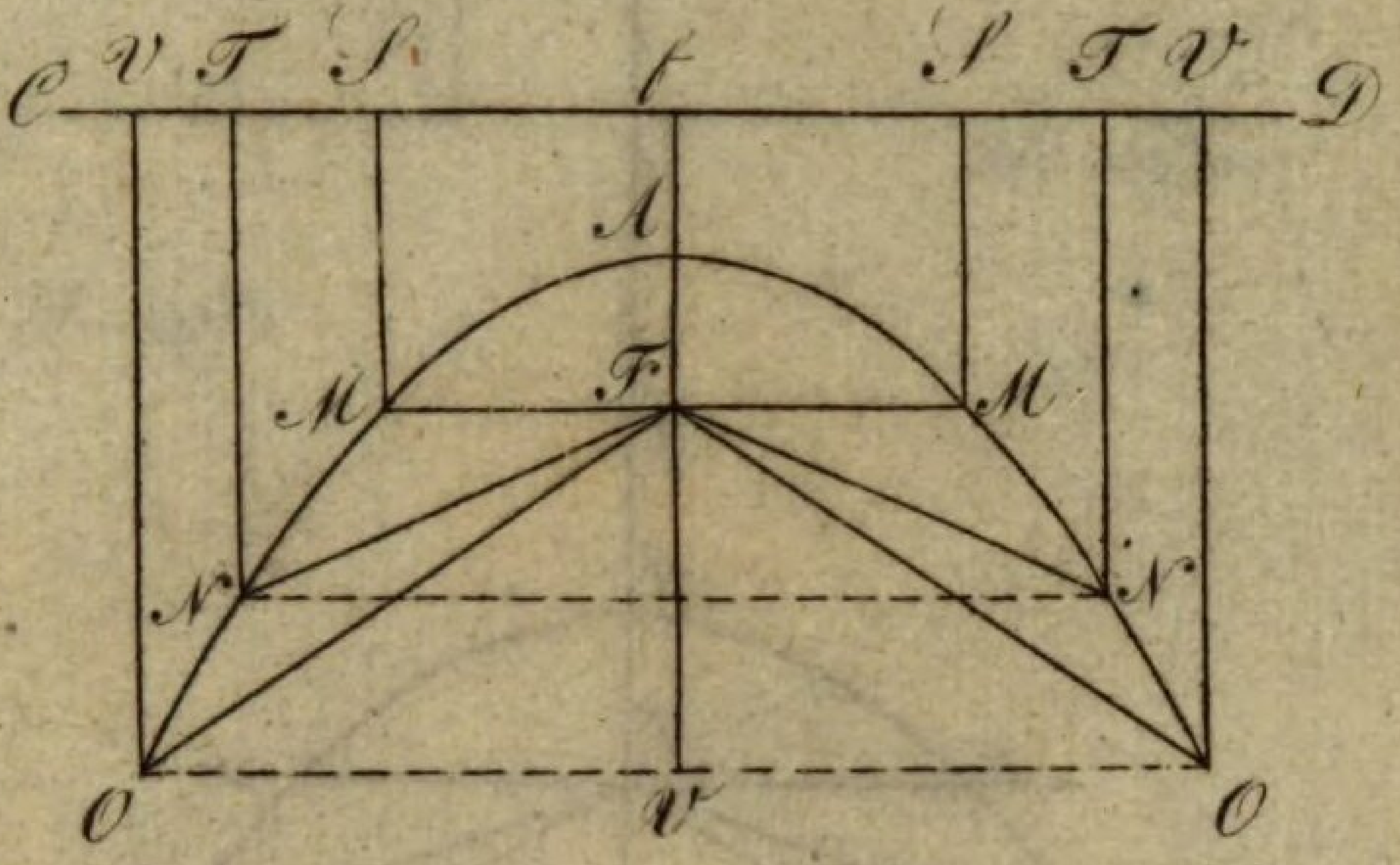
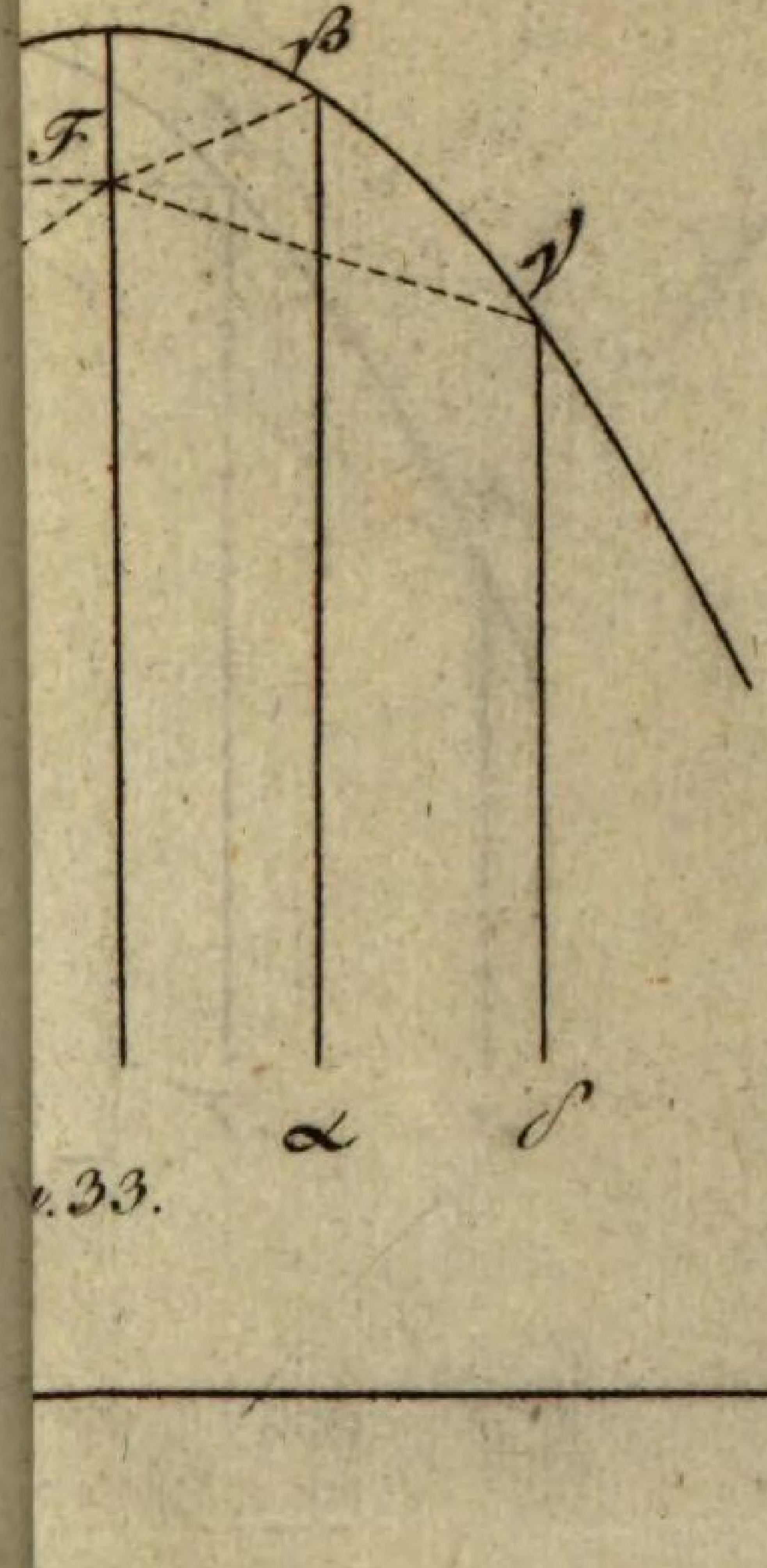


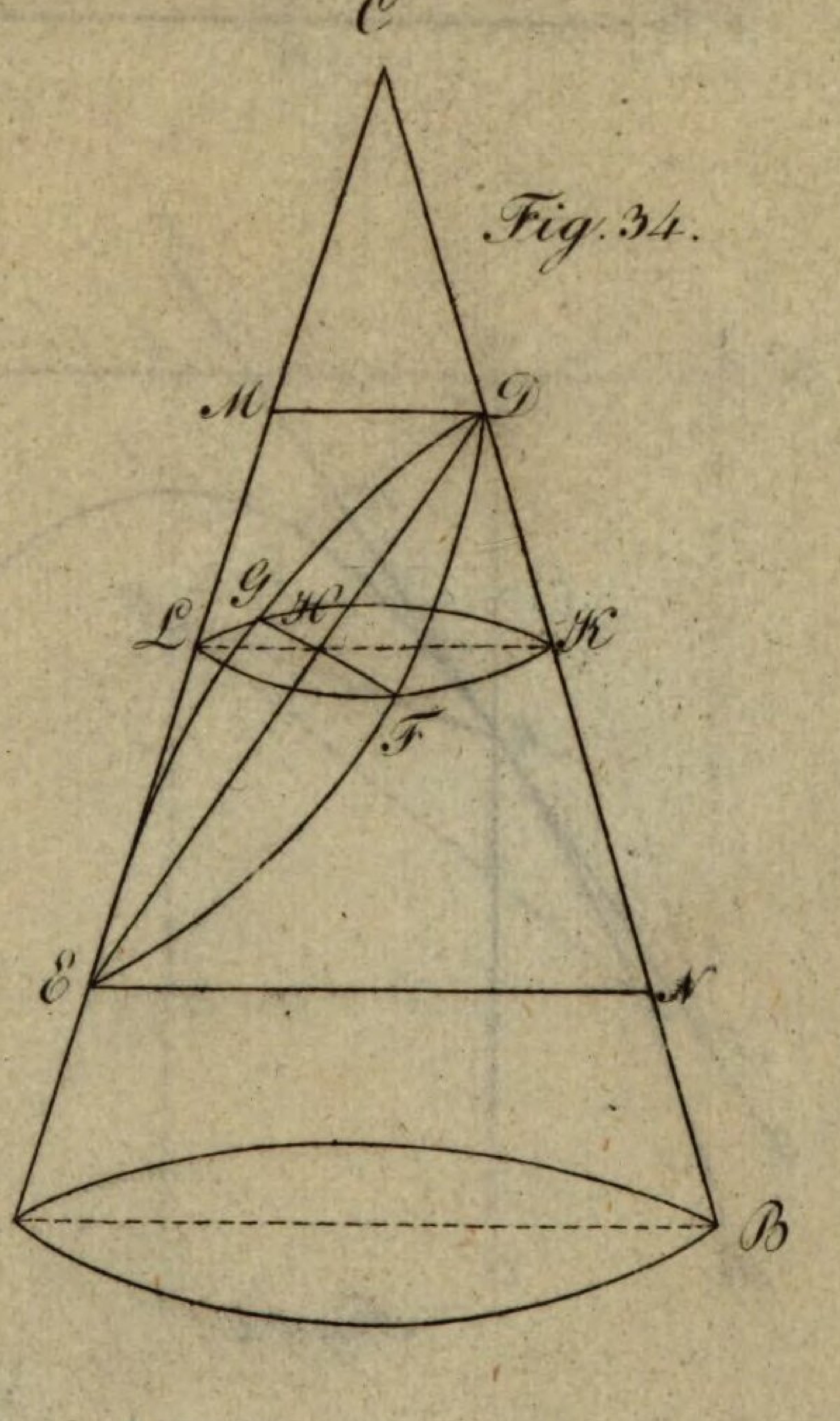
Fig. 31.





.33.

Fig. 34.



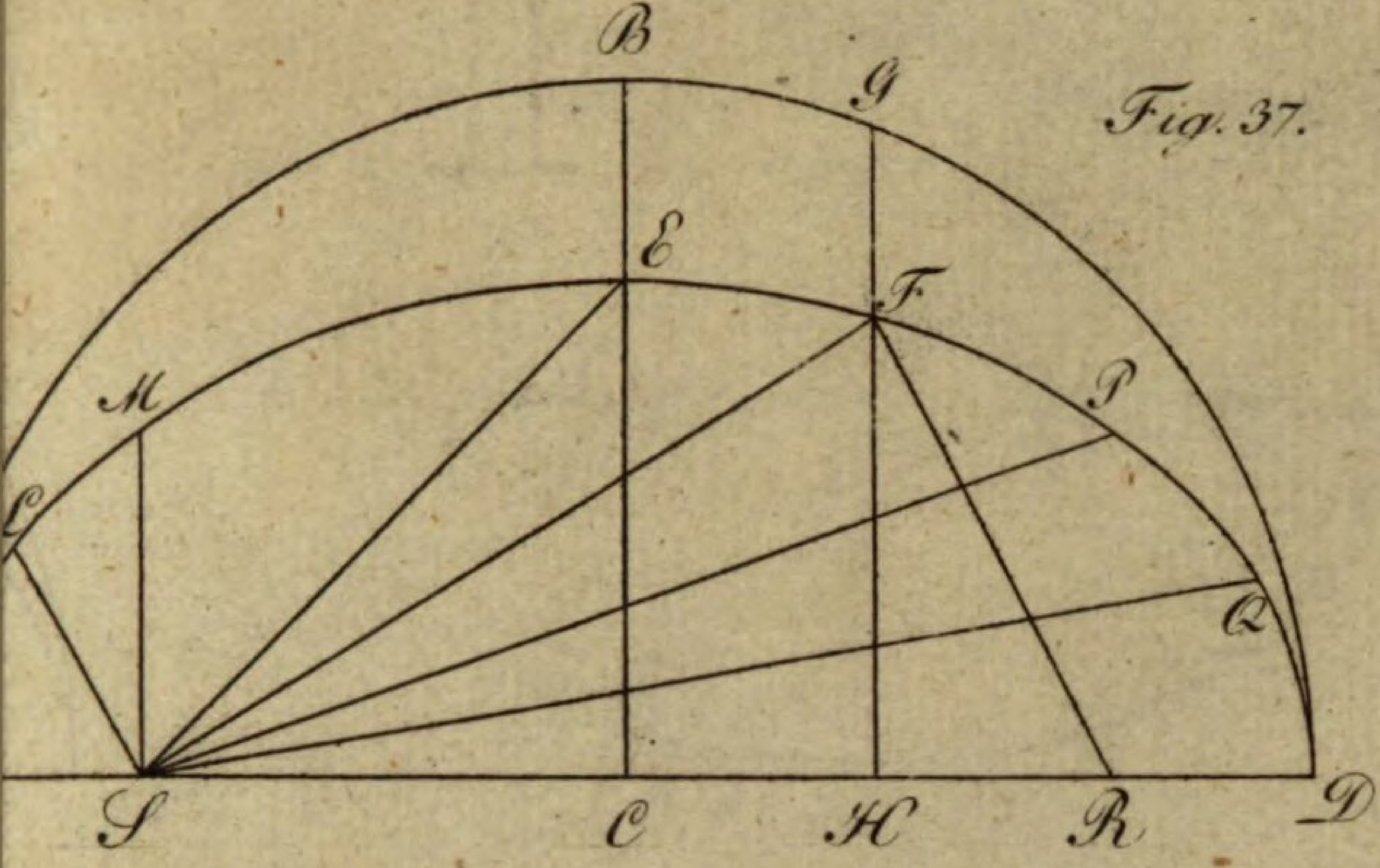


Fig. 37.

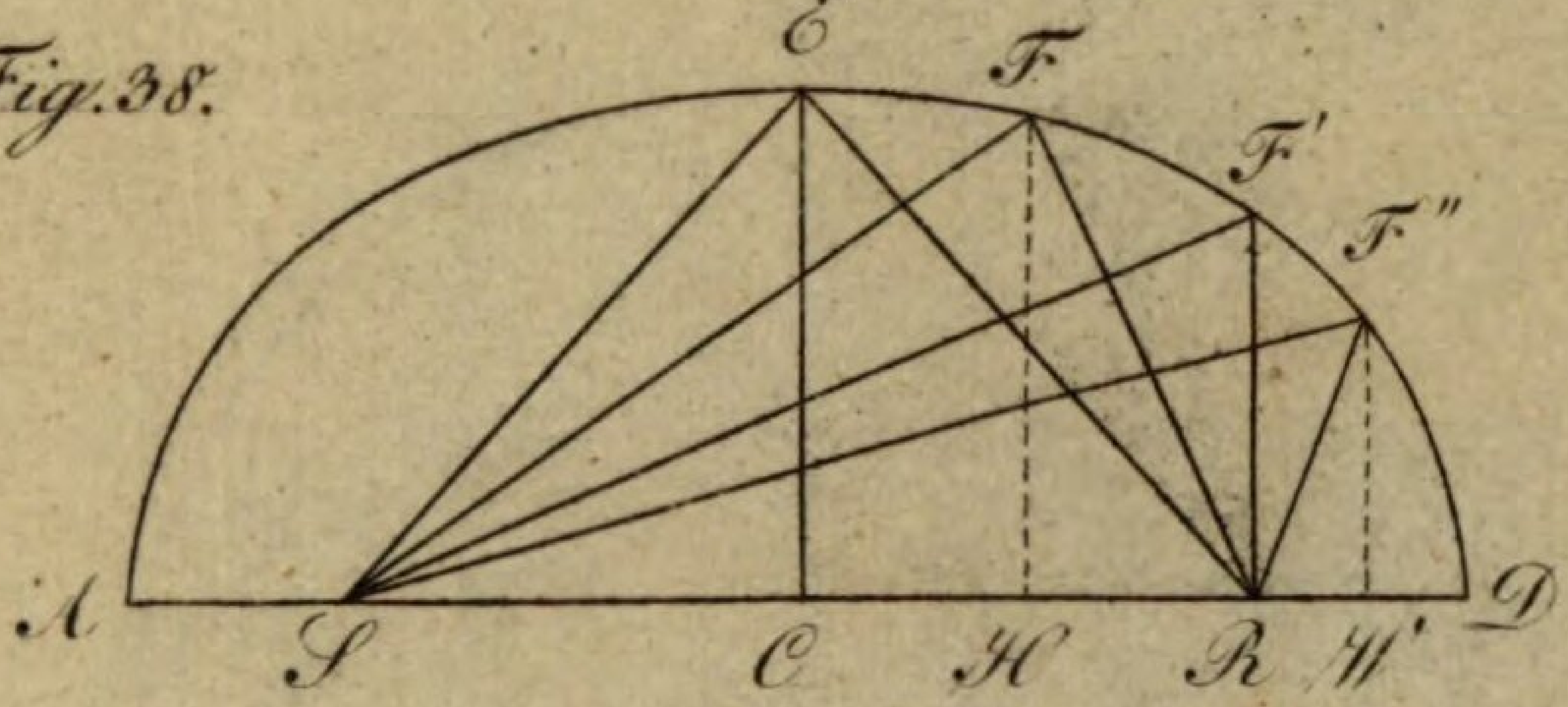


Fig. 38.

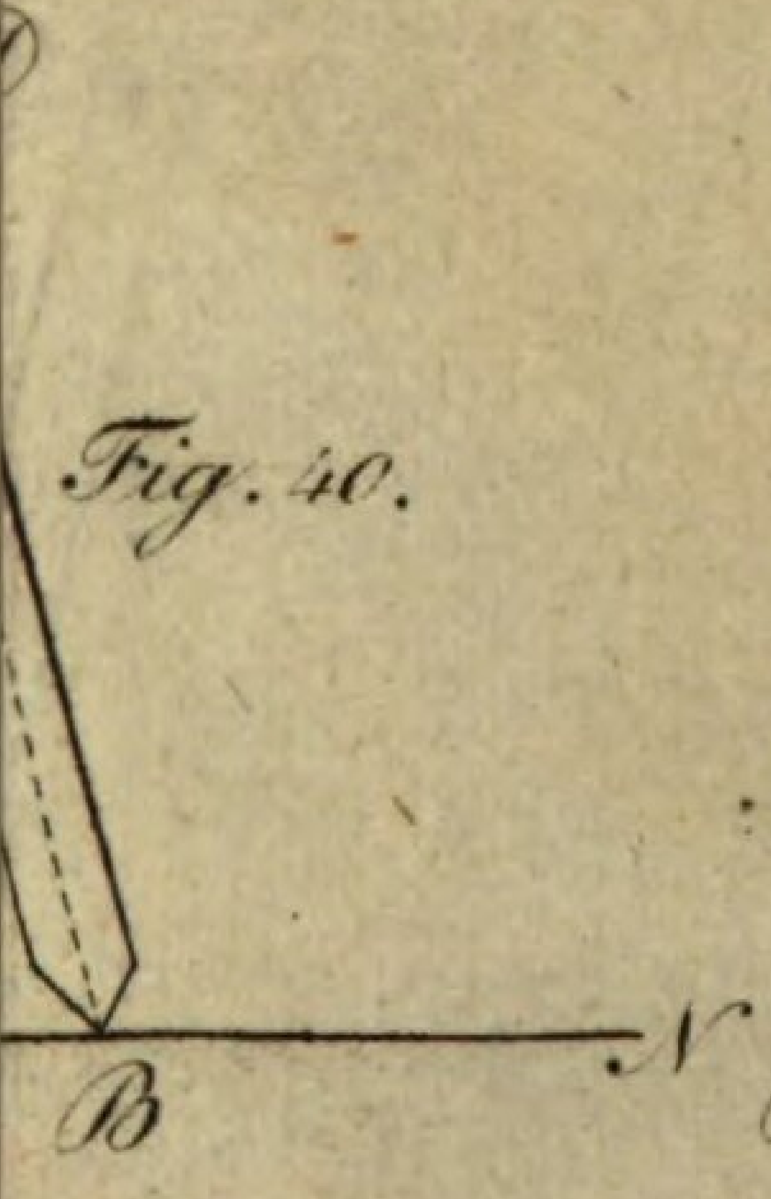


Fig. 40.

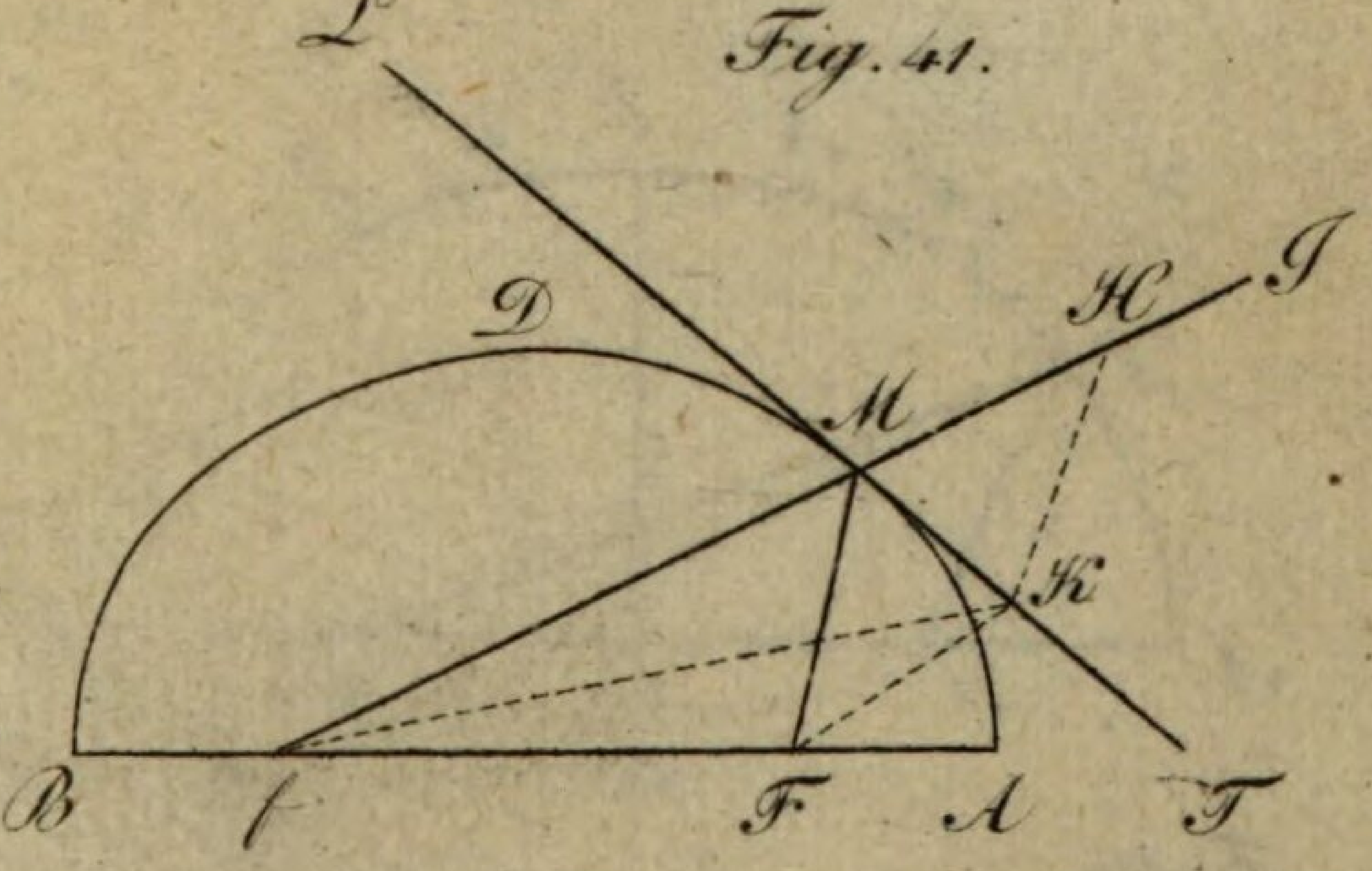
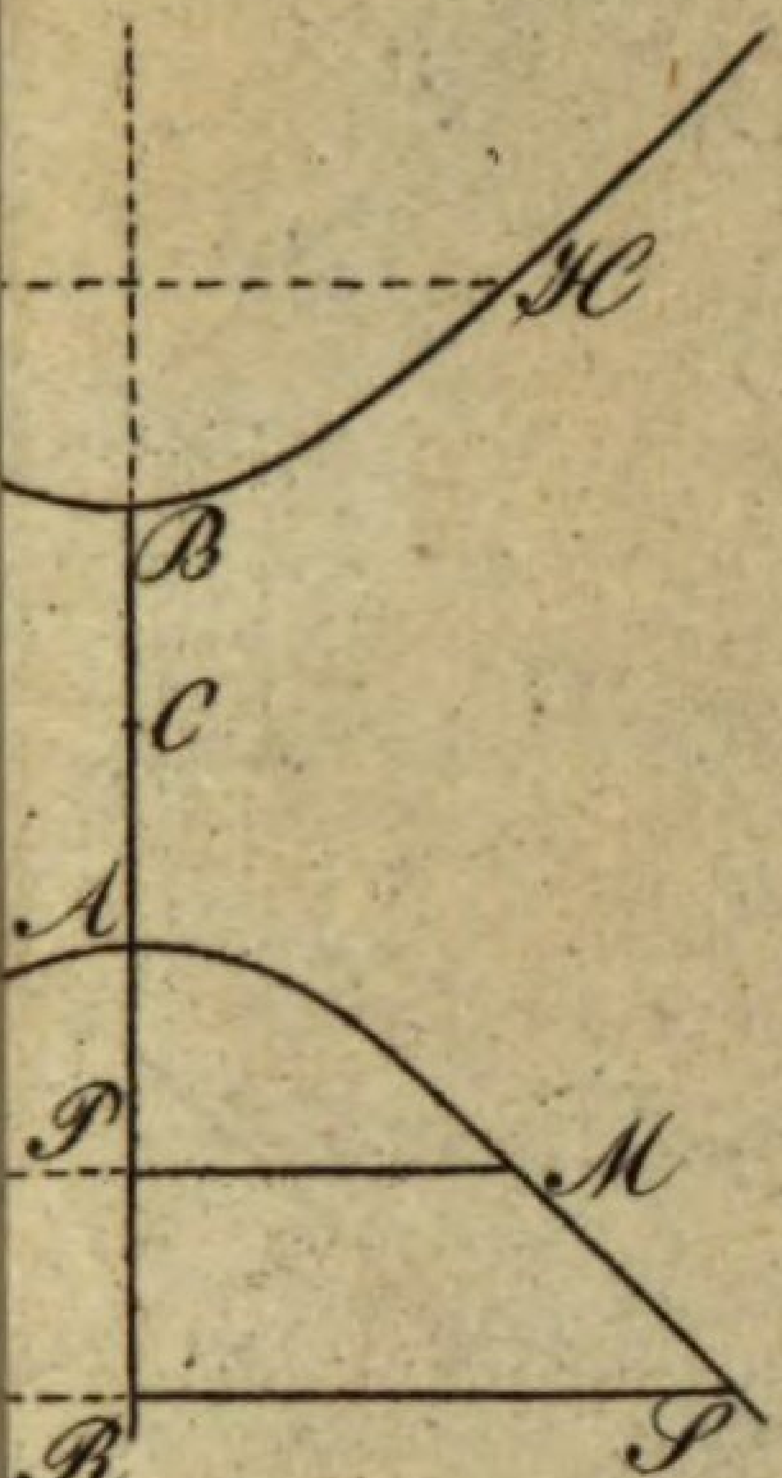


Fig. 41.



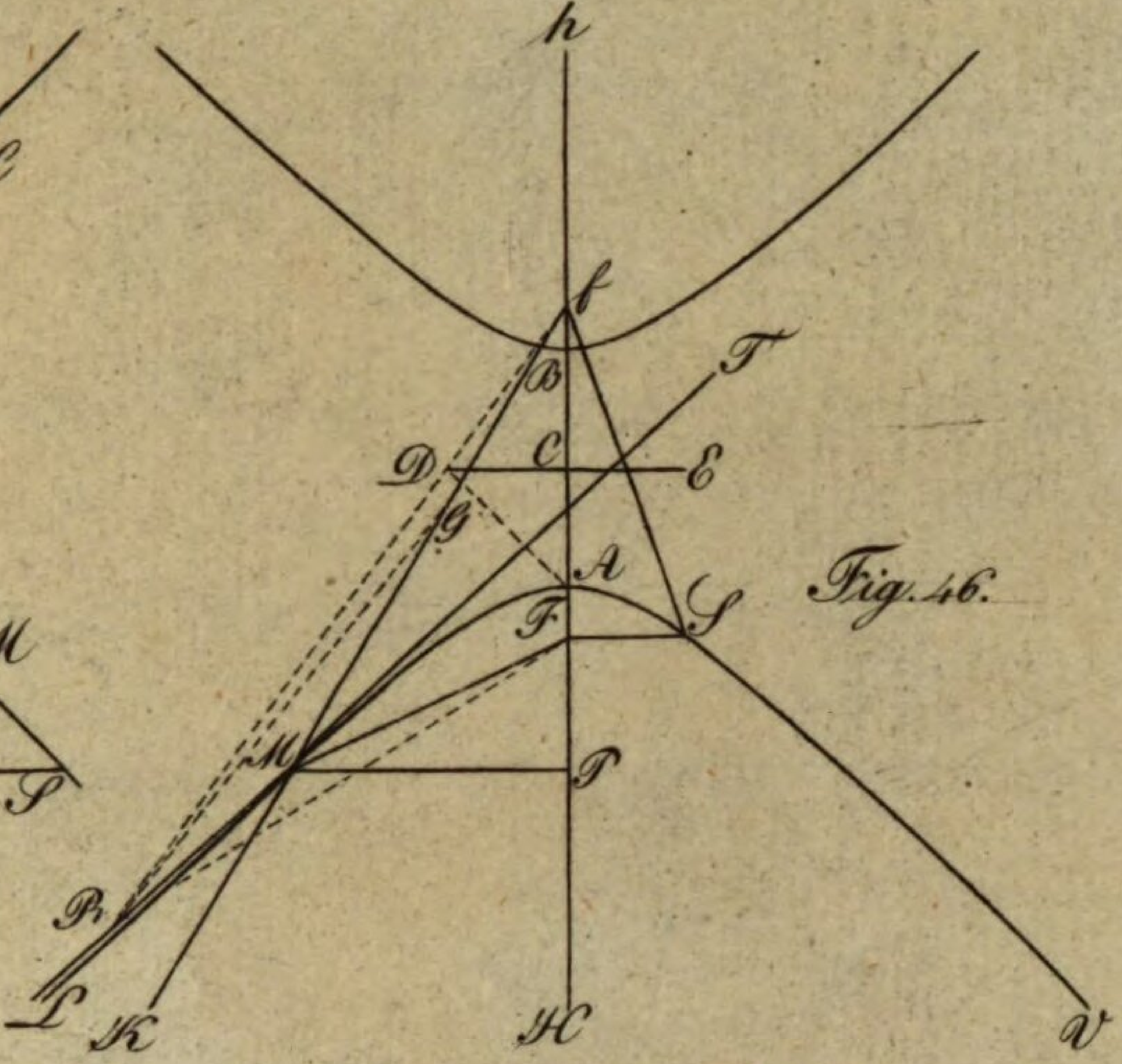


Fig. 46.

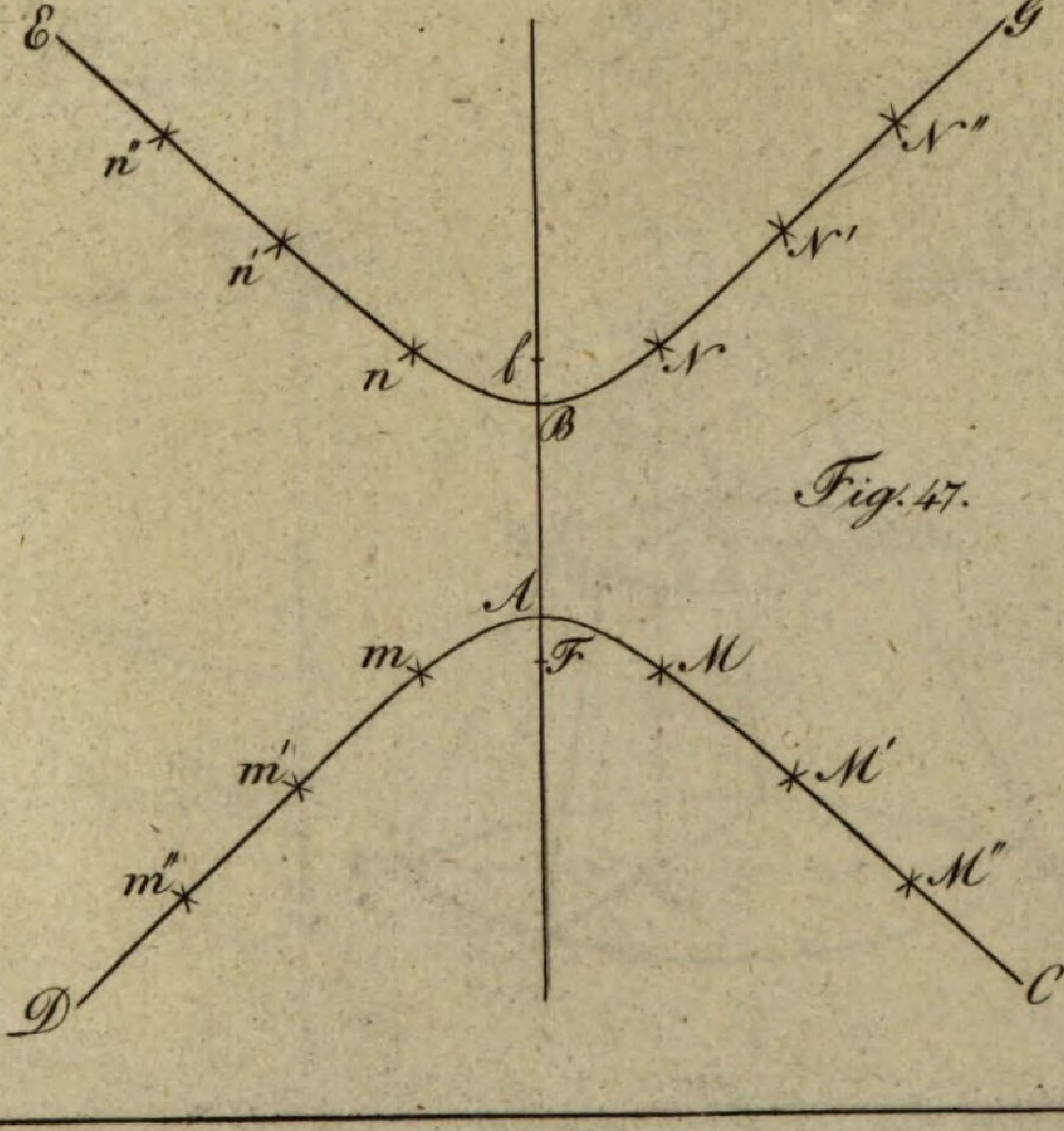
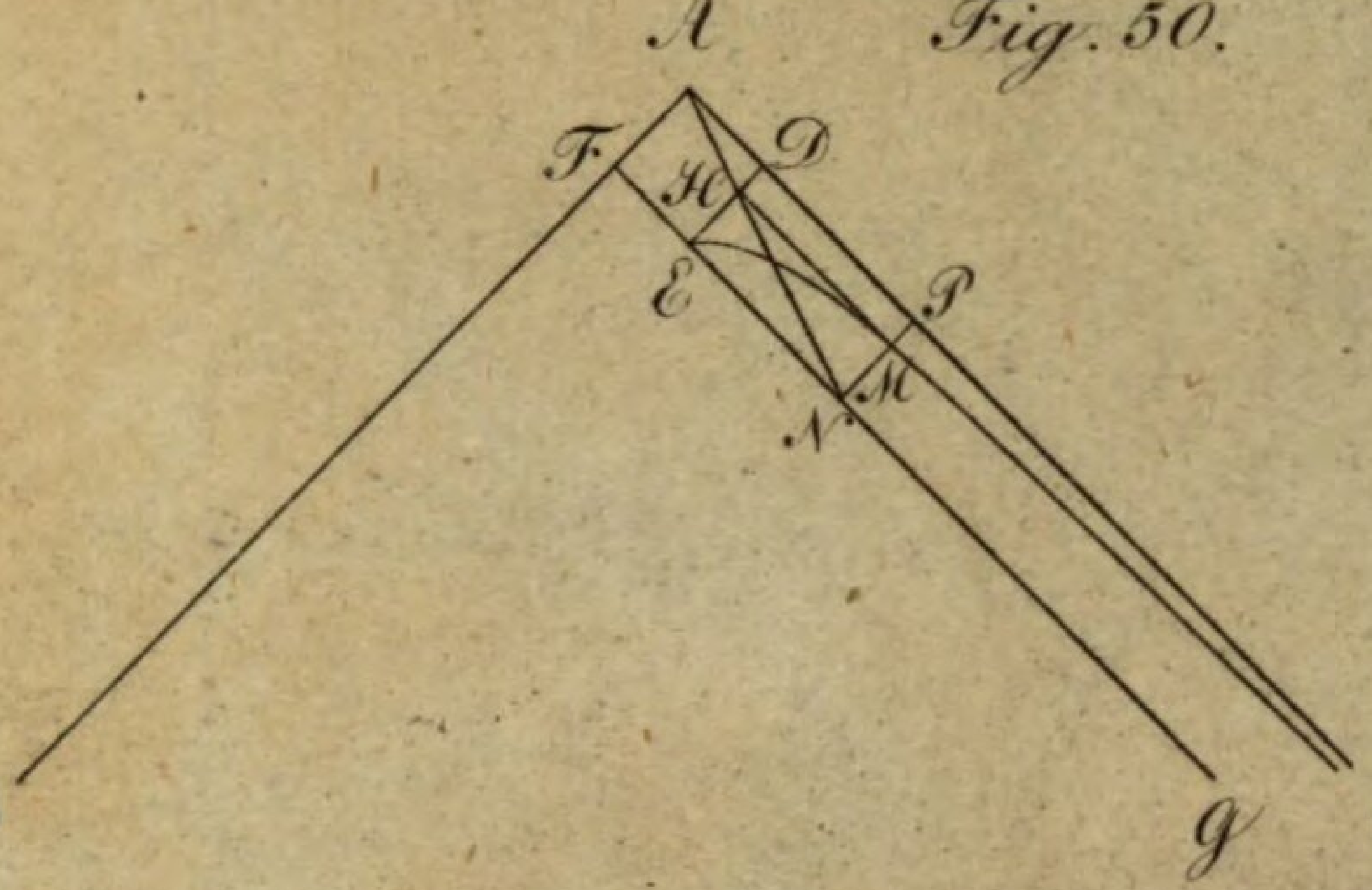
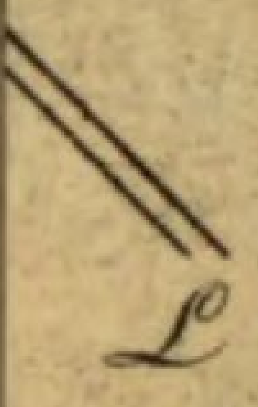


Fig. 47.

Fig. 50.





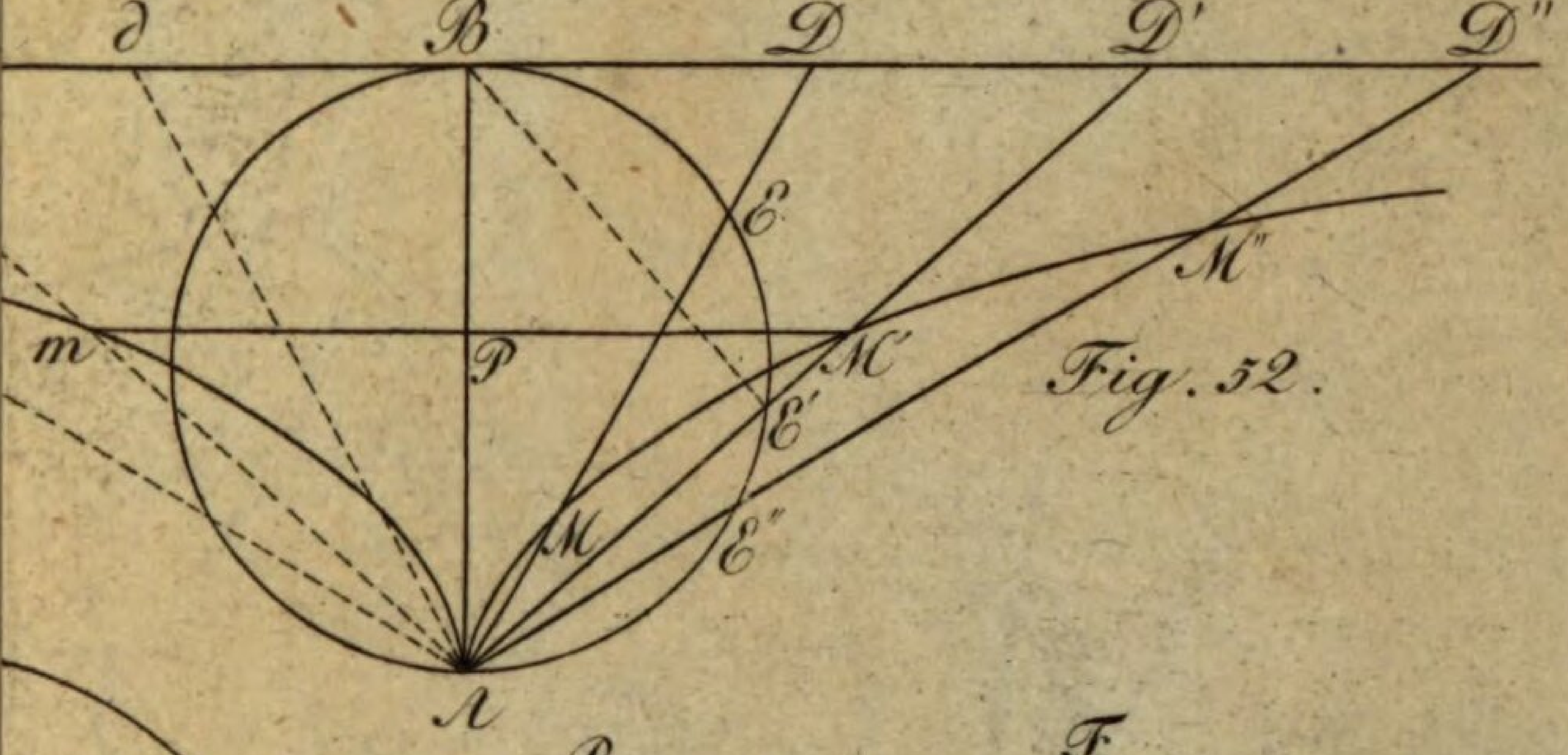
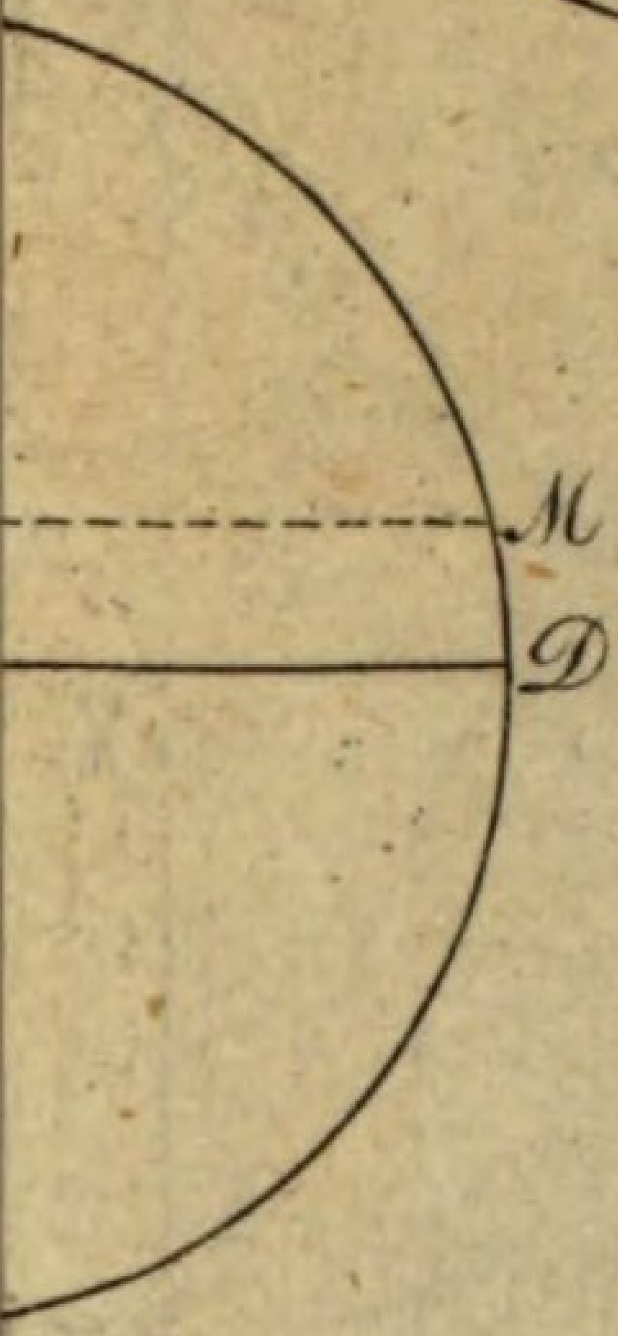


Fig. 52.



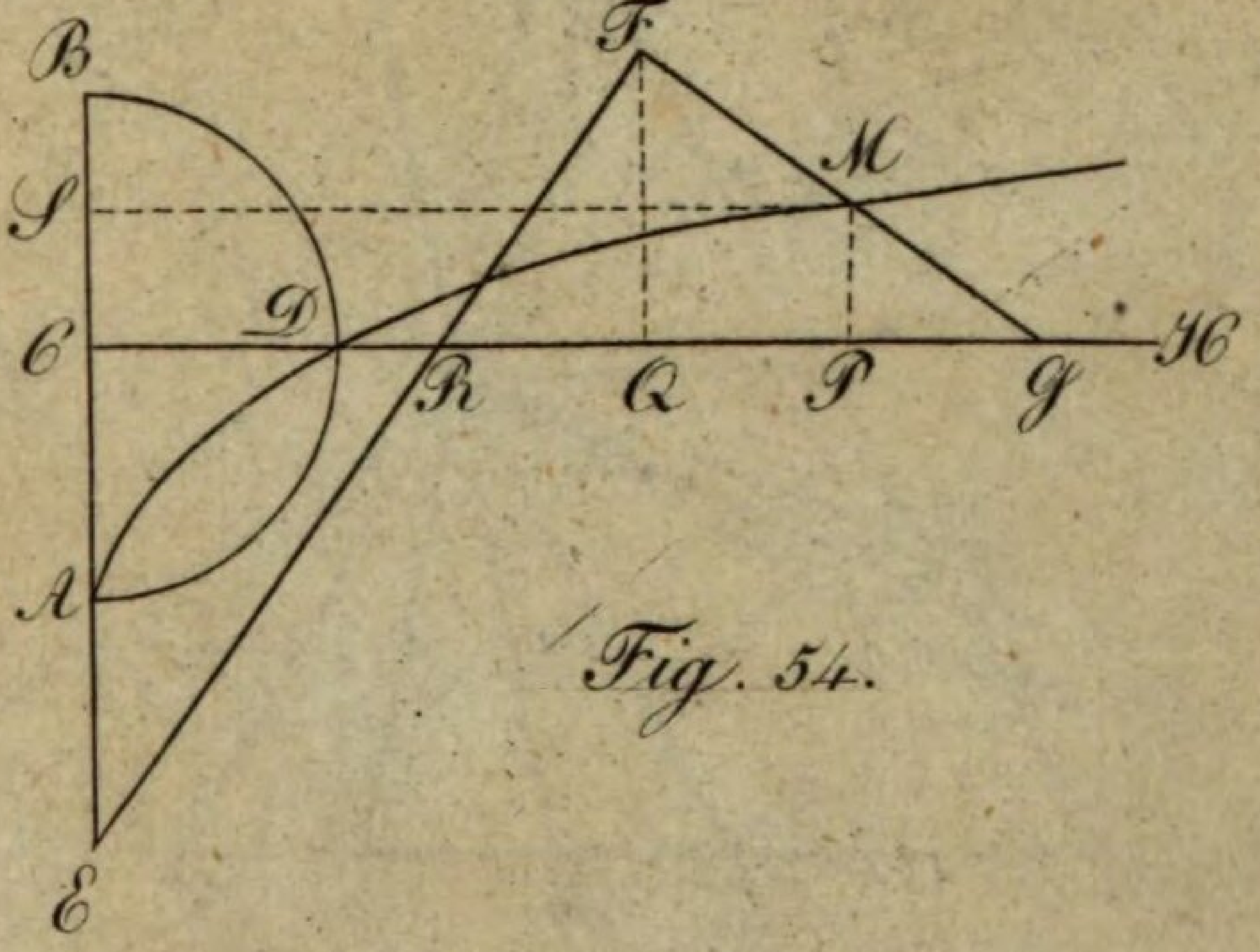


Fig. 54.

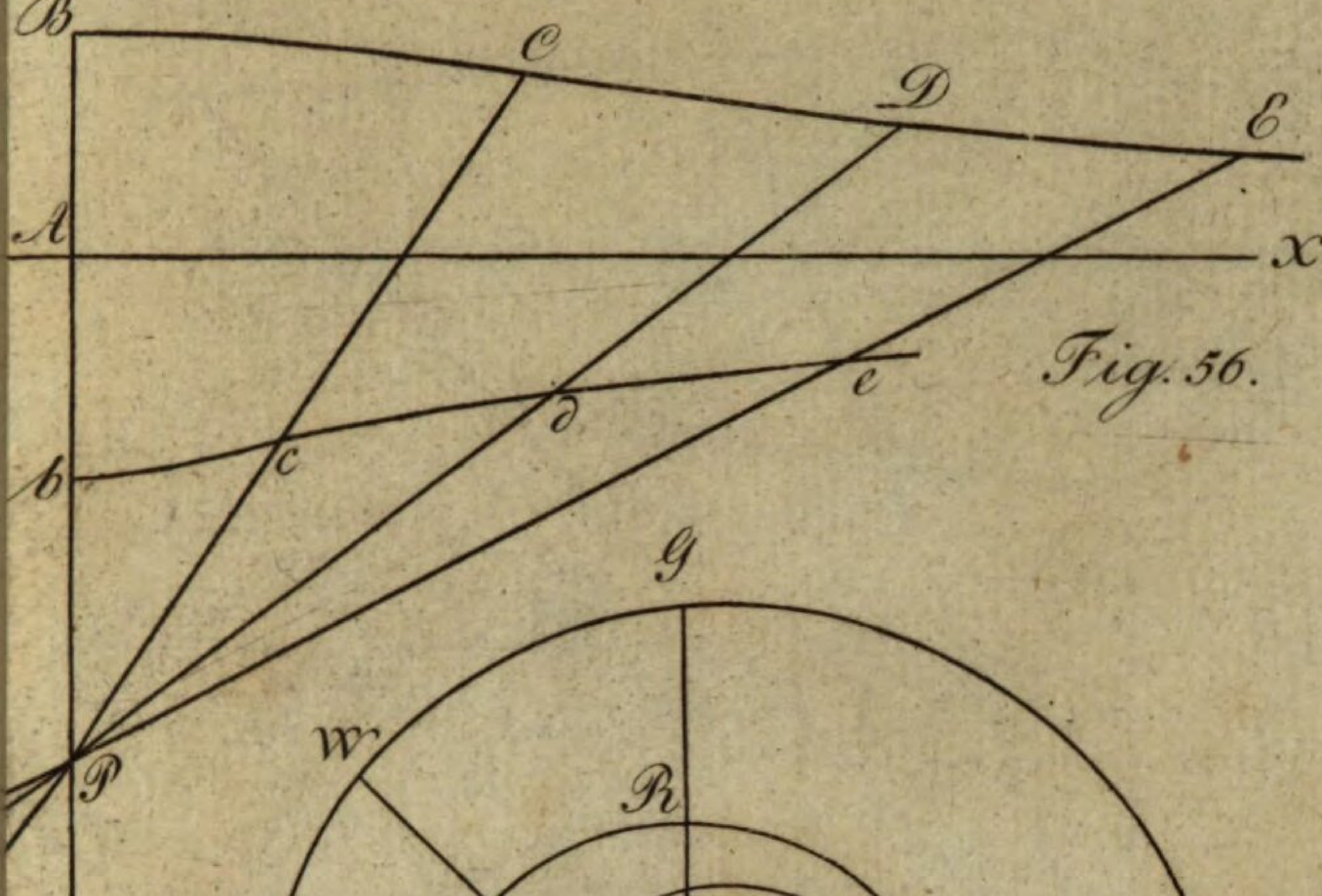


Fig. 56.

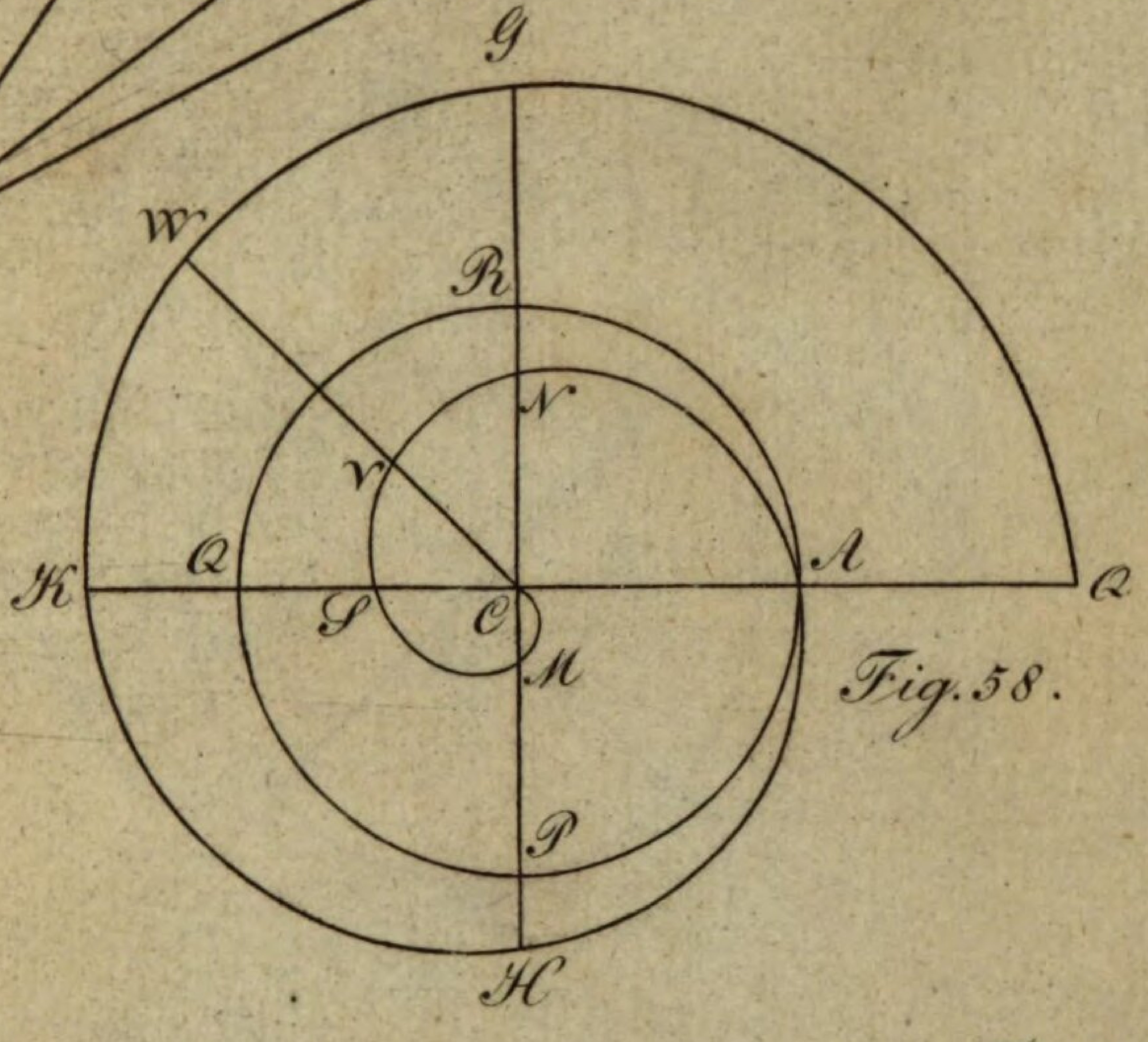


Fig. 58.

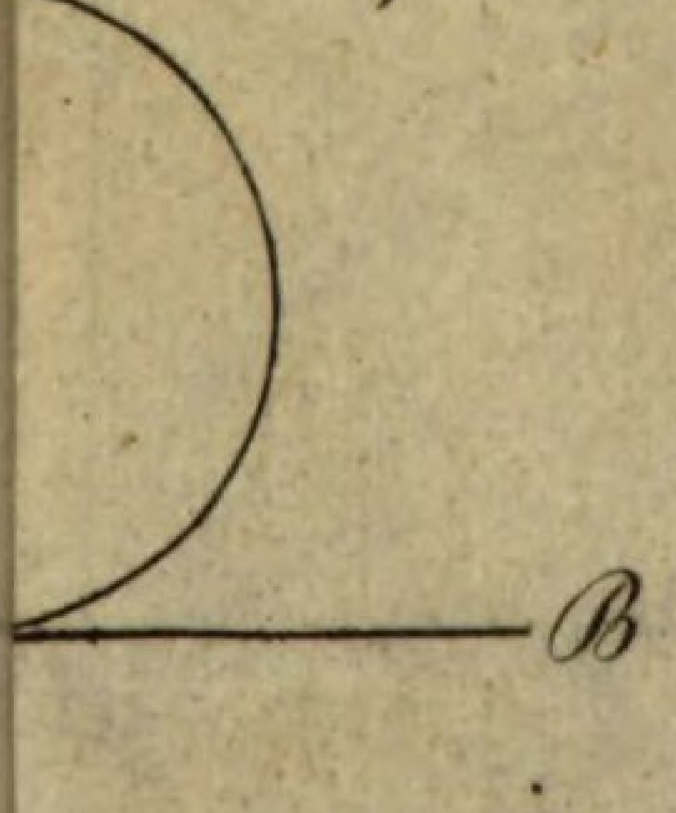


Fig. 60.

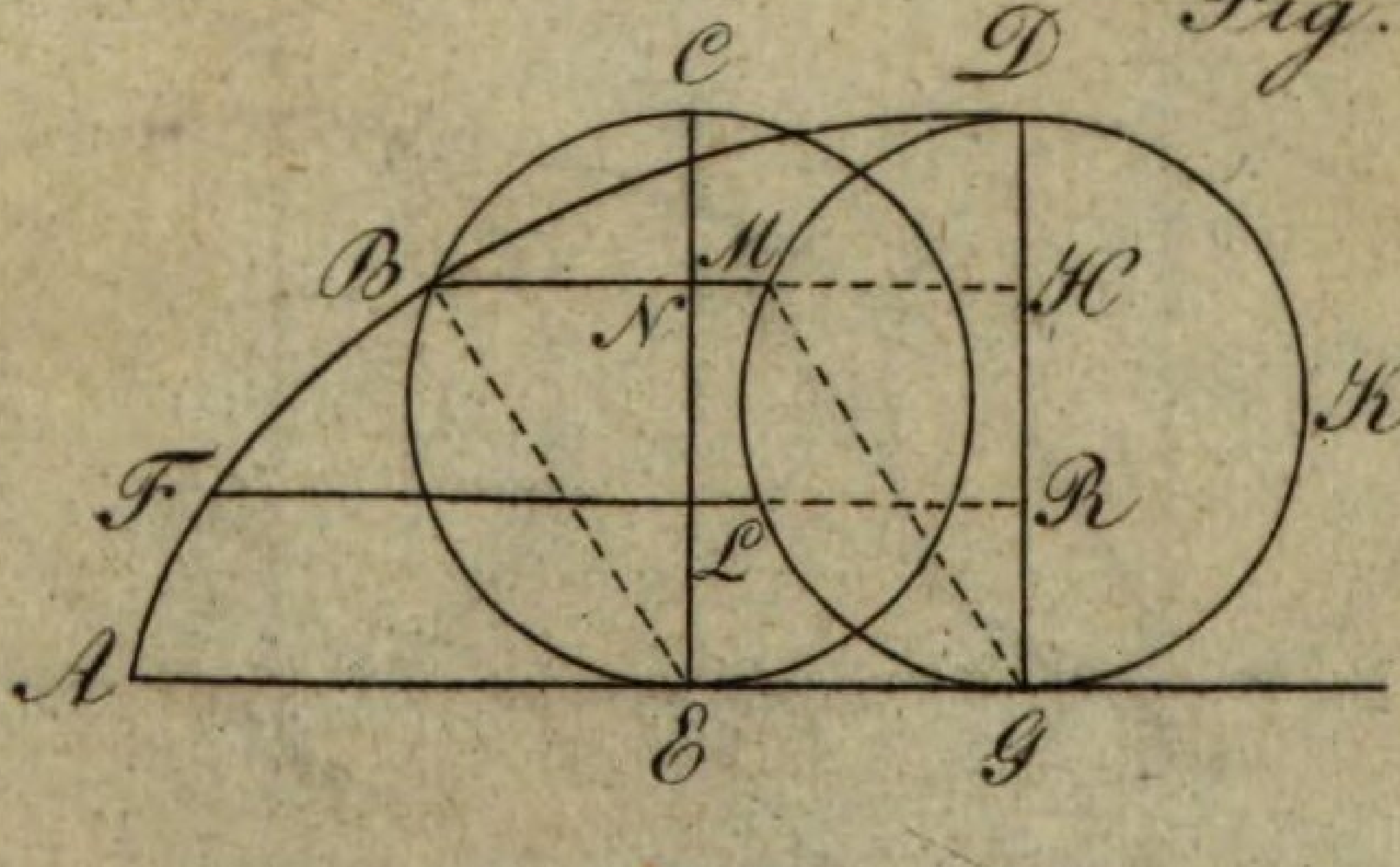


Fig. 62.

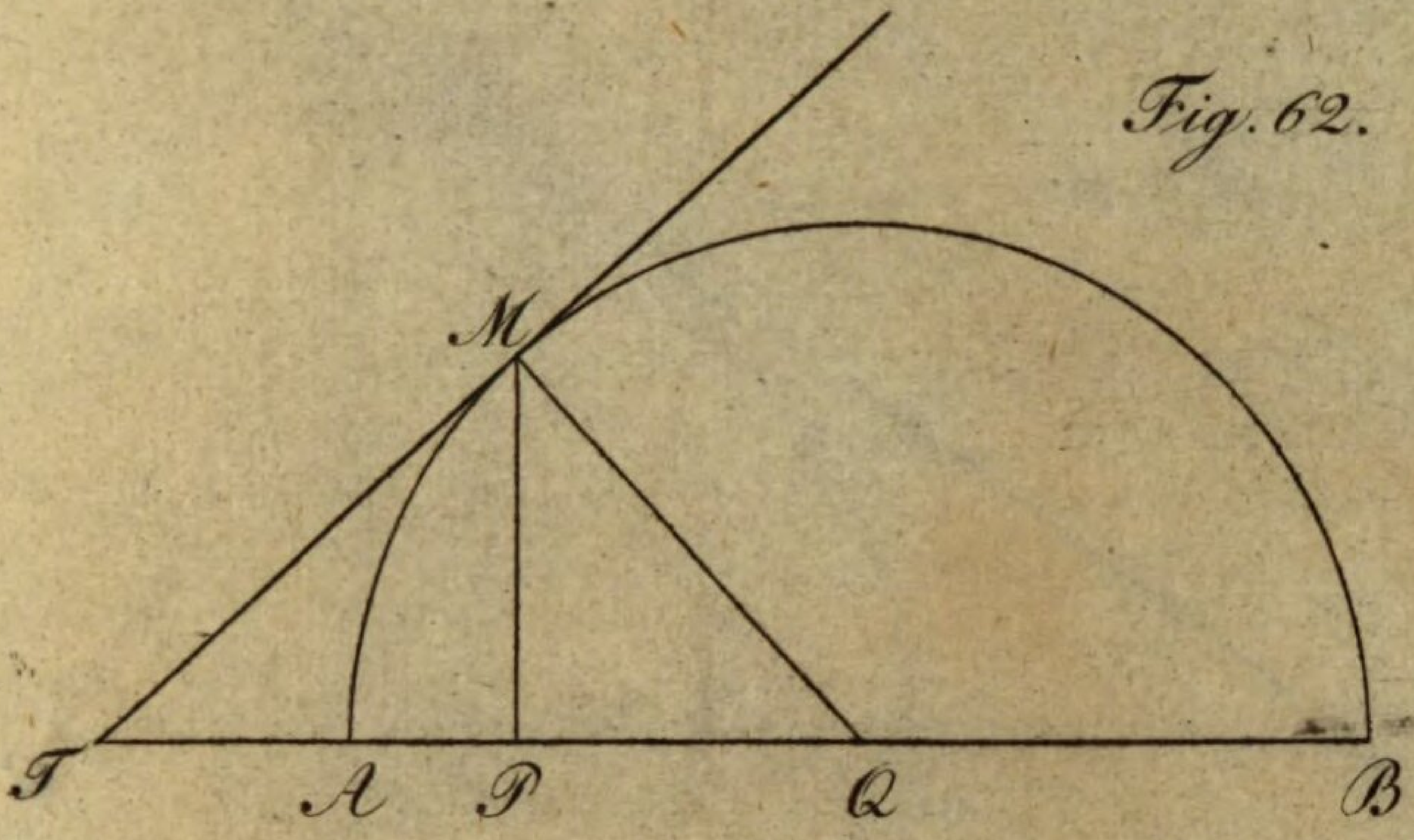
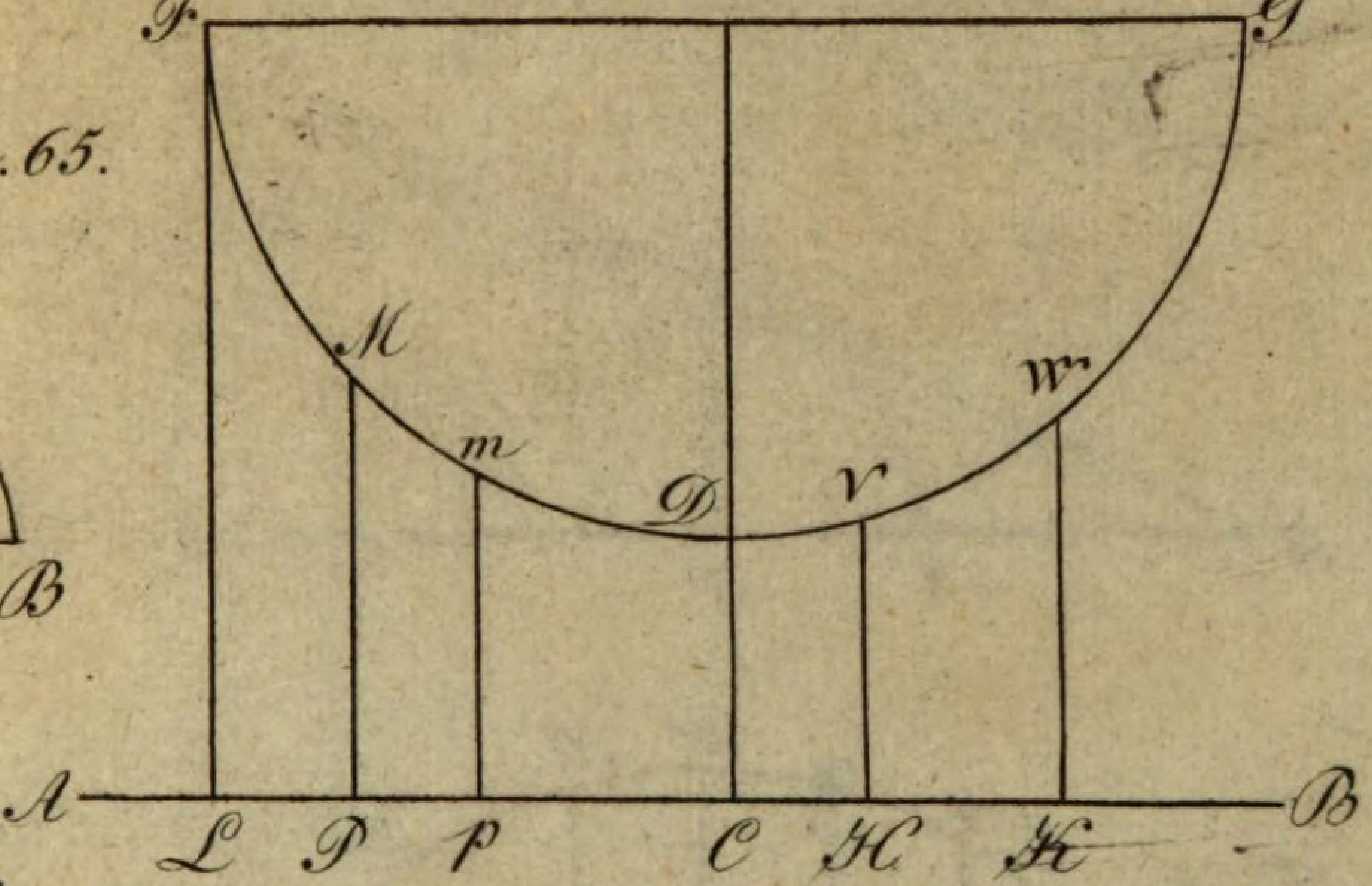
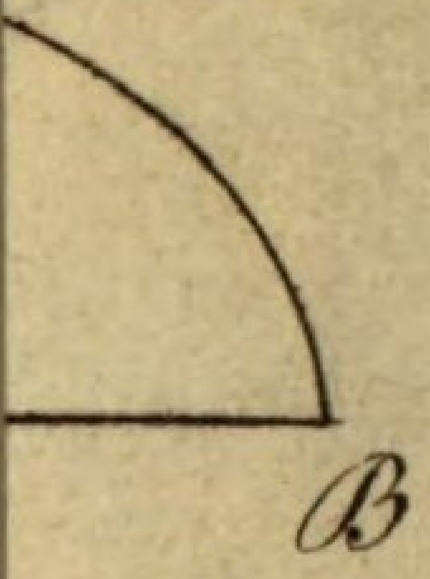


Fig. 65.





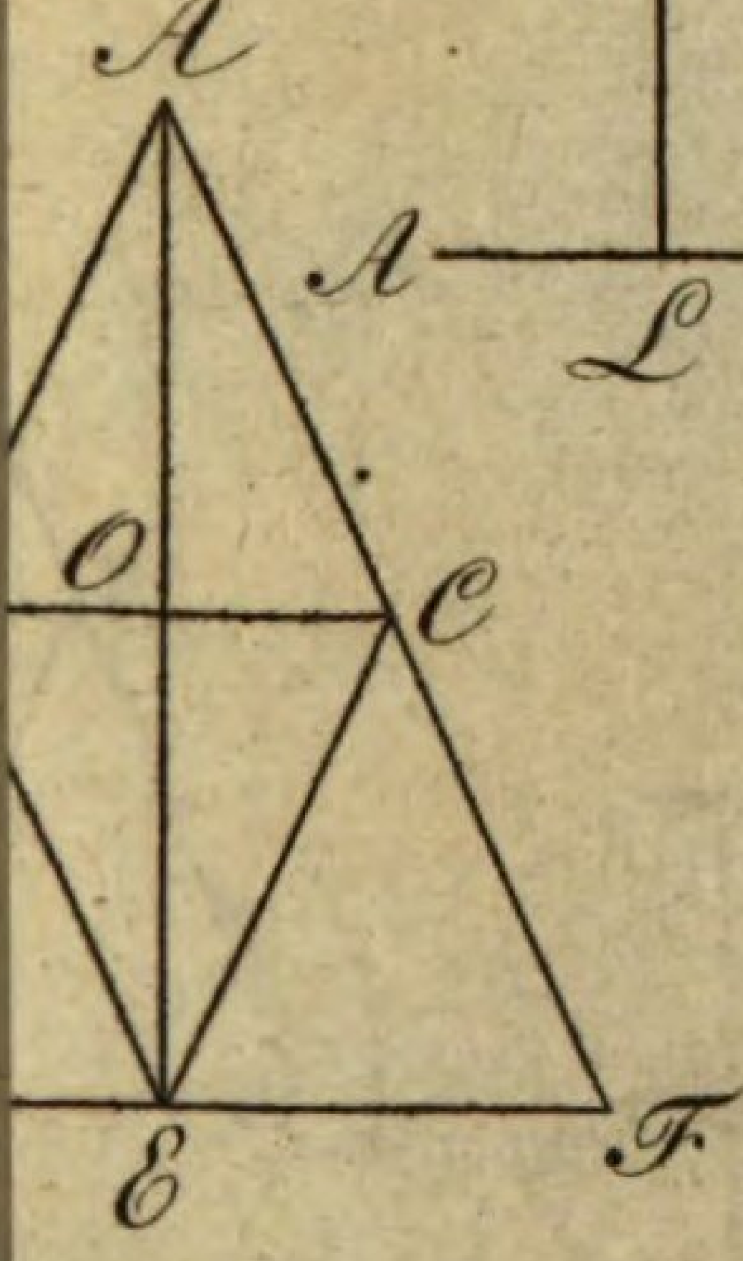
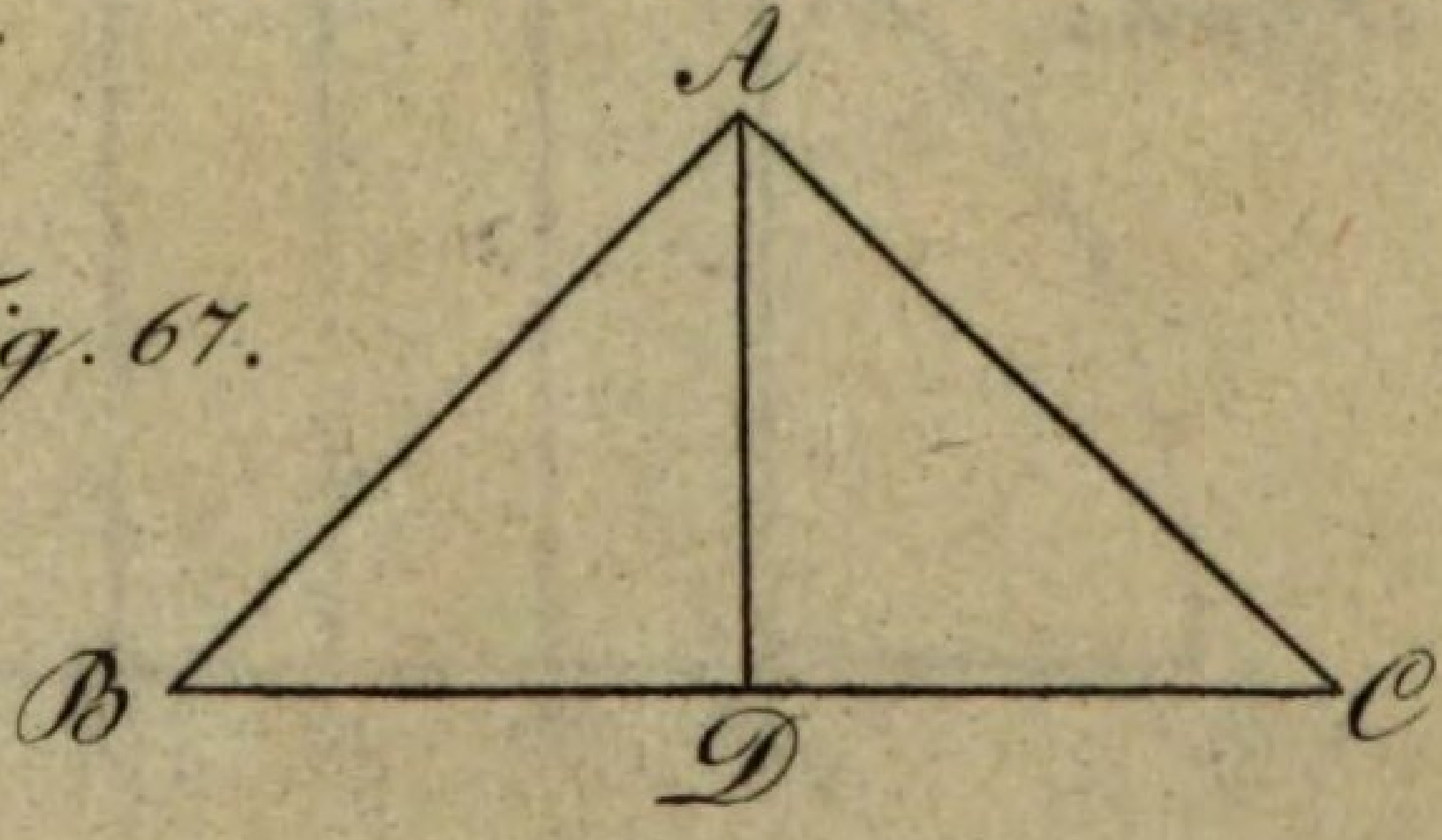


Fig. 67.



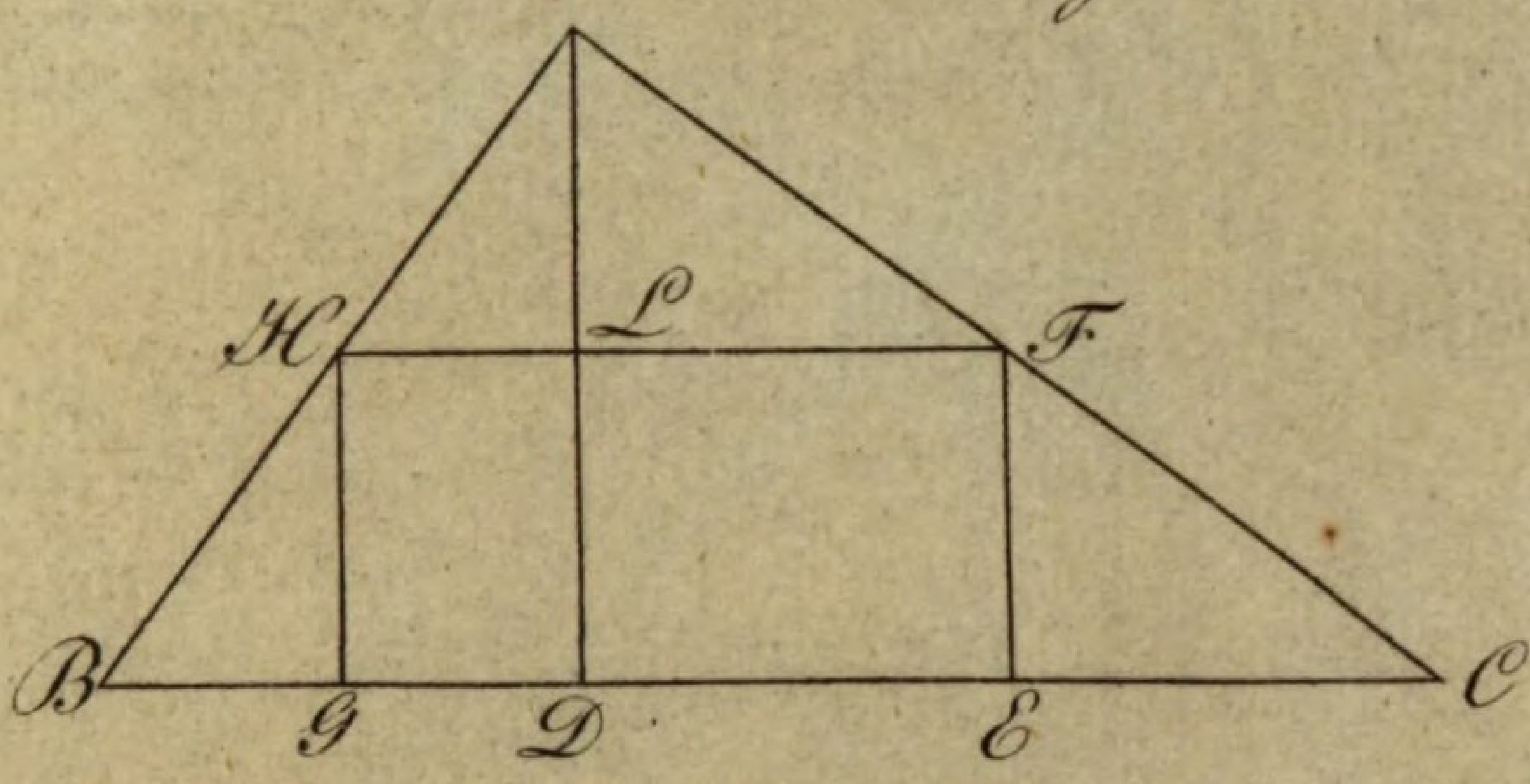


Fig. 71.

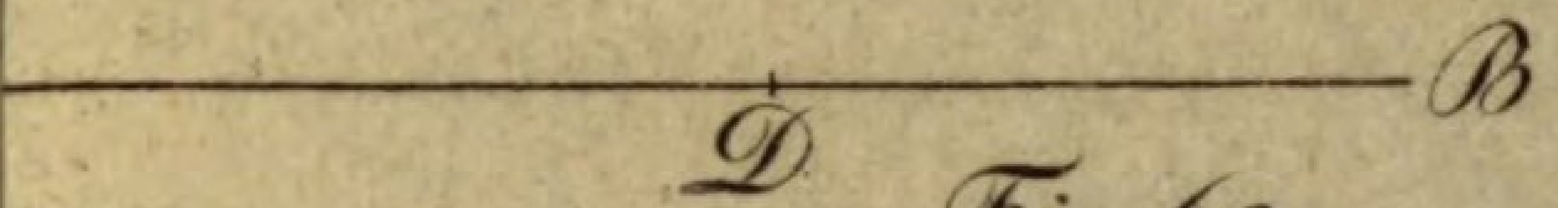


Fig. 69.

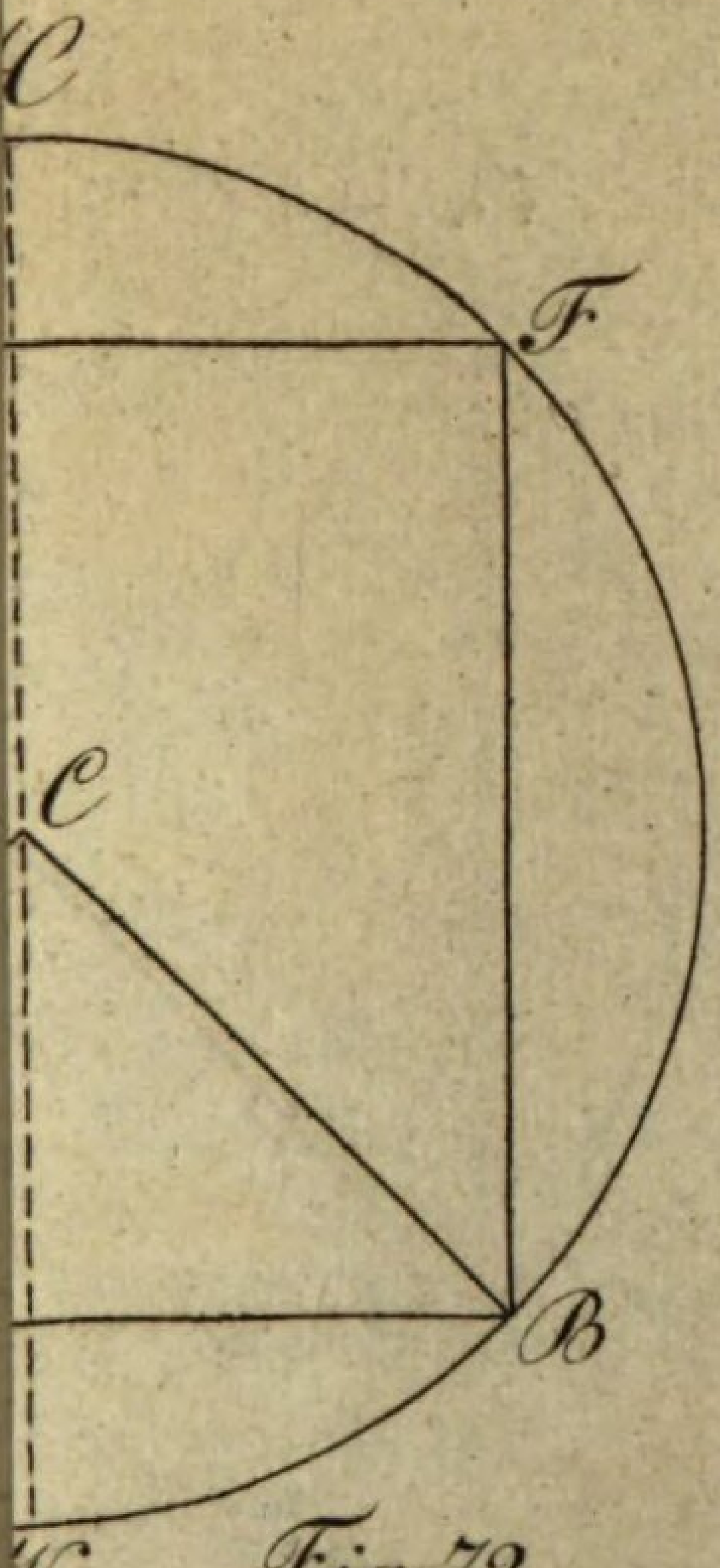


Fig. 72.

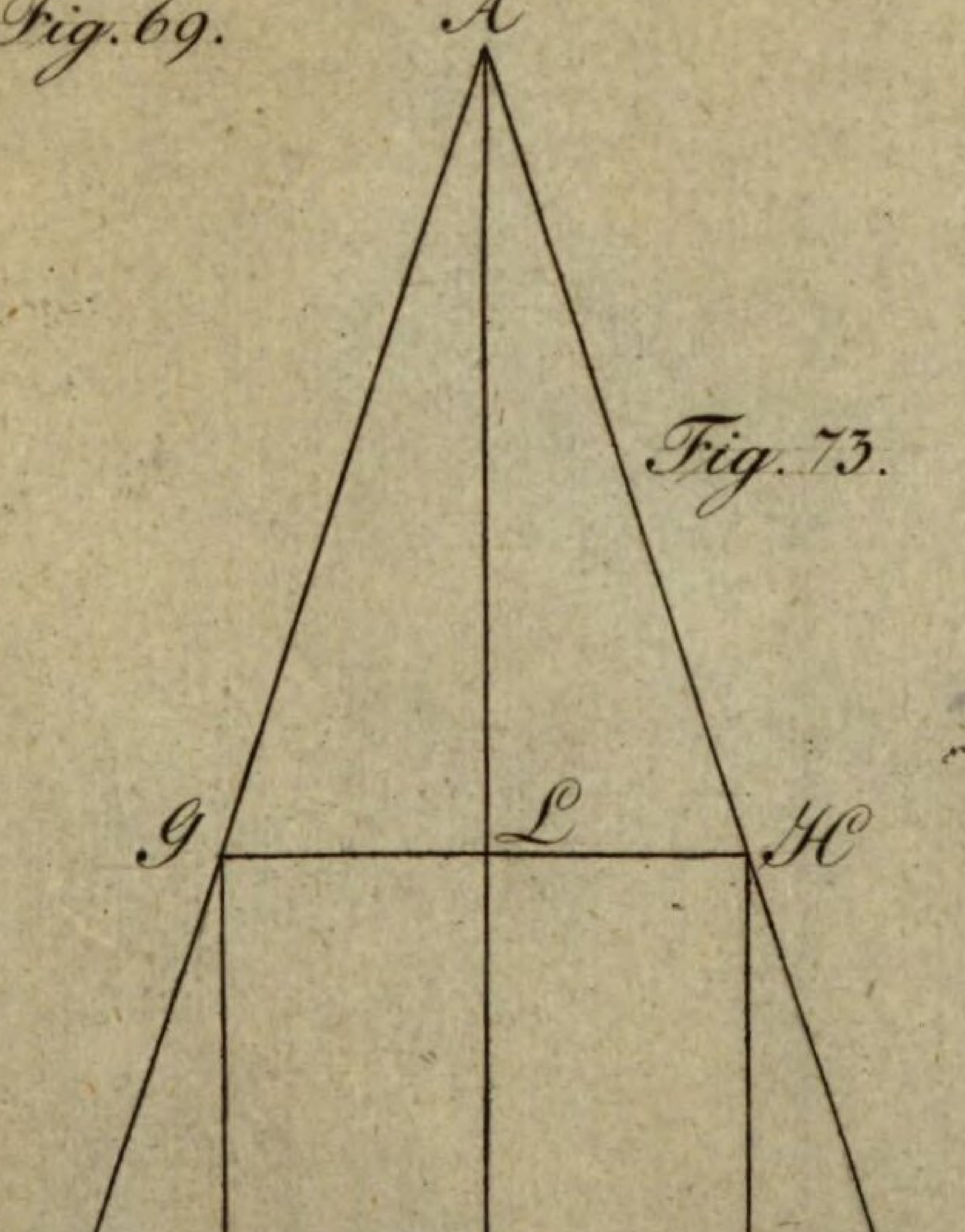
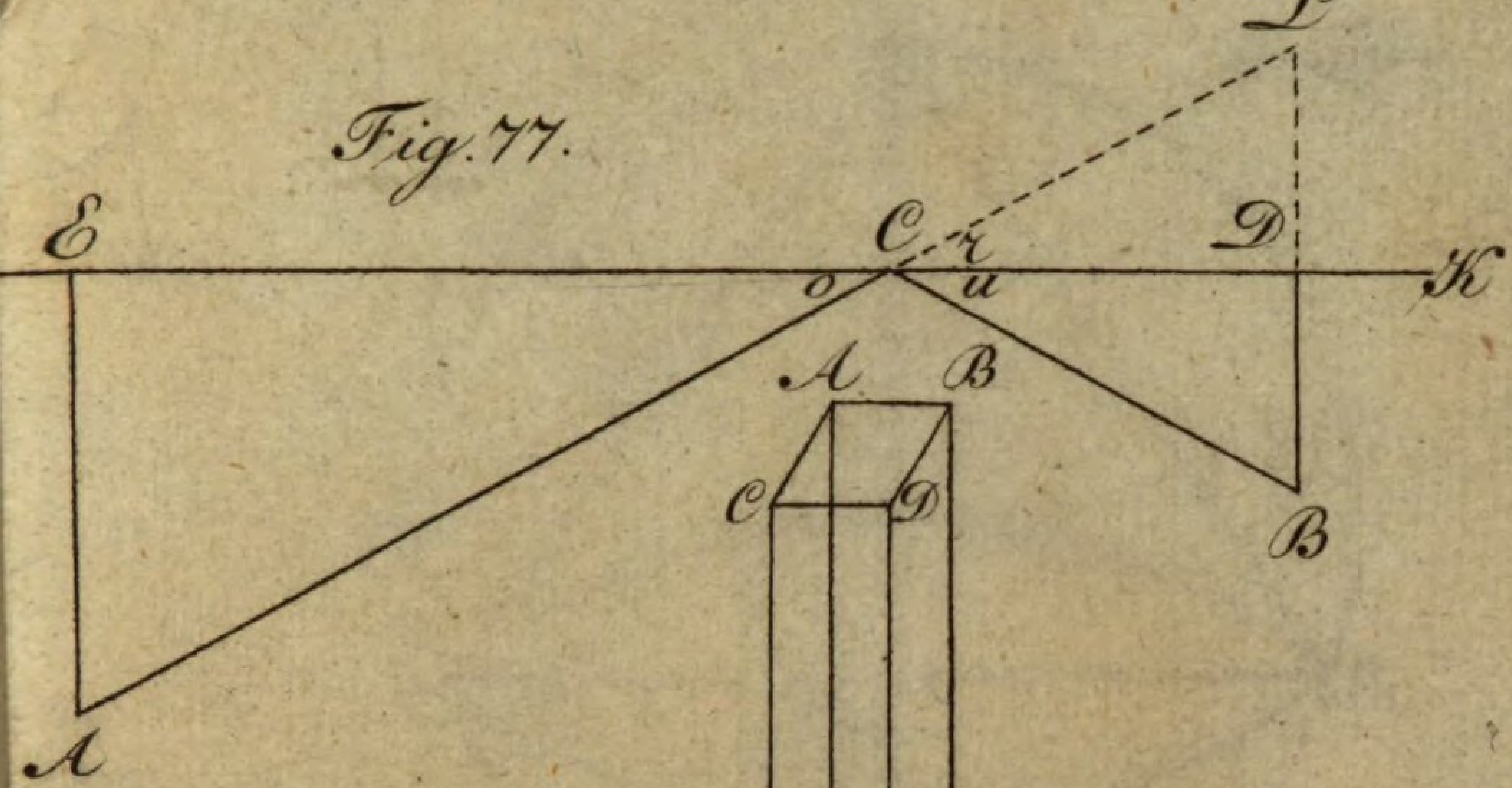


Fig. 73.

Fig. 77.



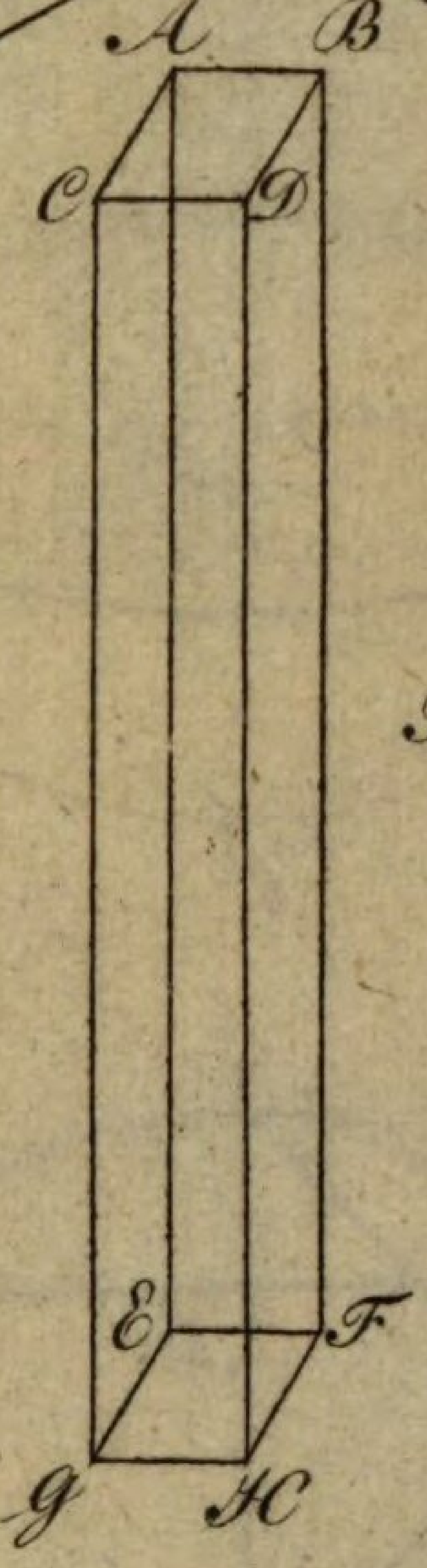


Fig. 79.

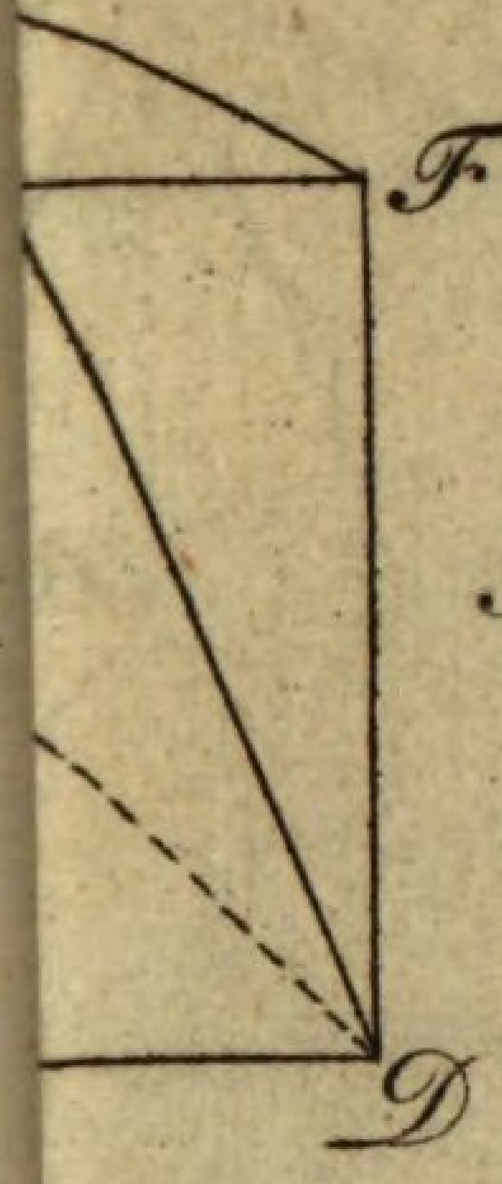


Fig. 76.

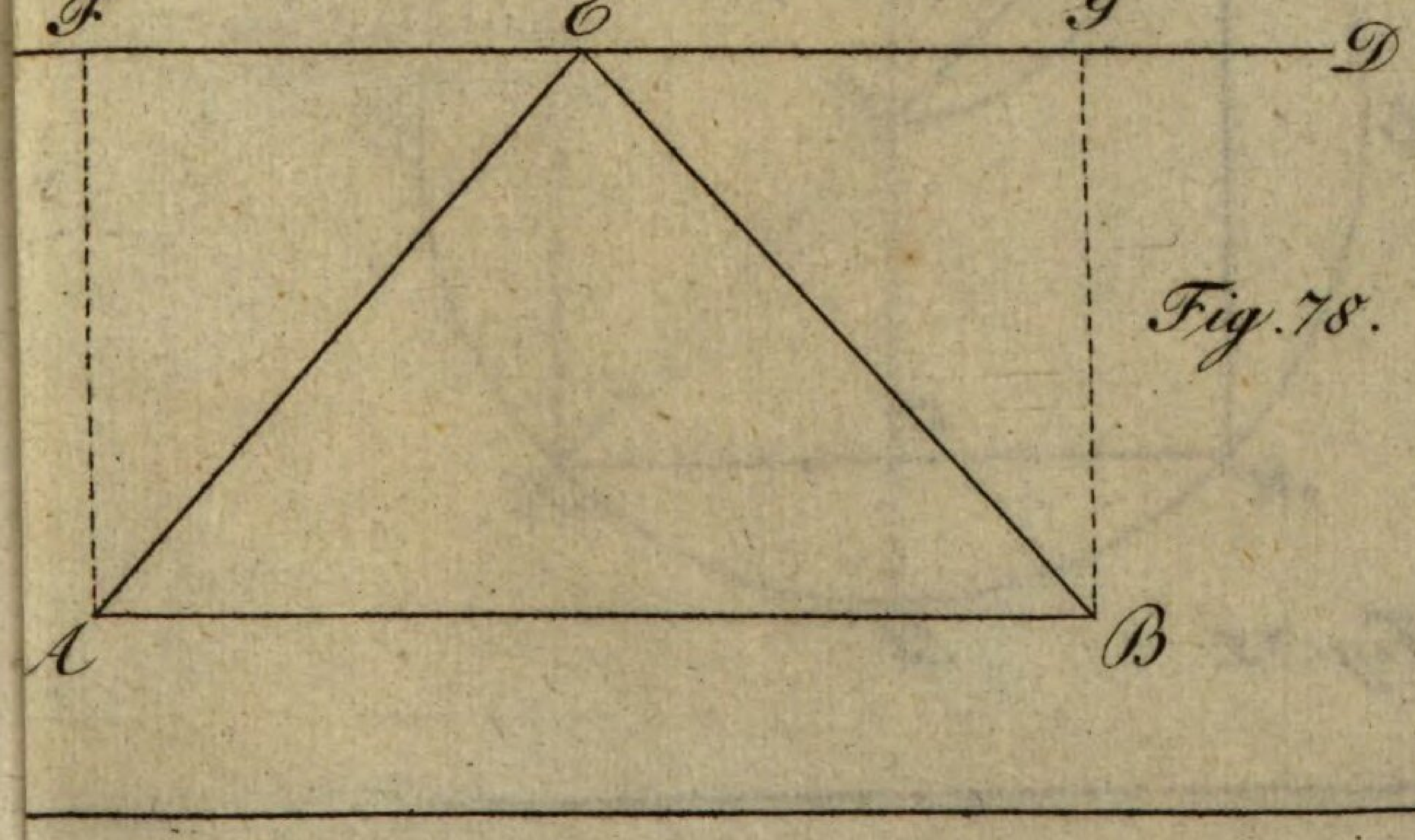
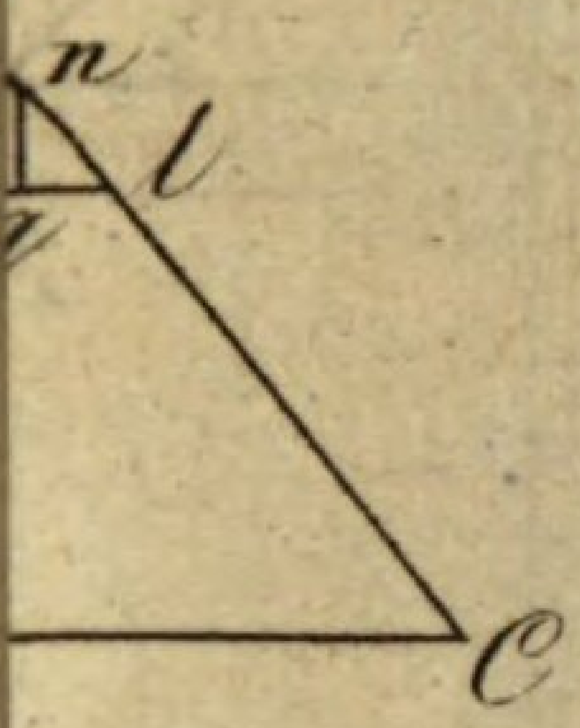


Fig. 78.



. 81.

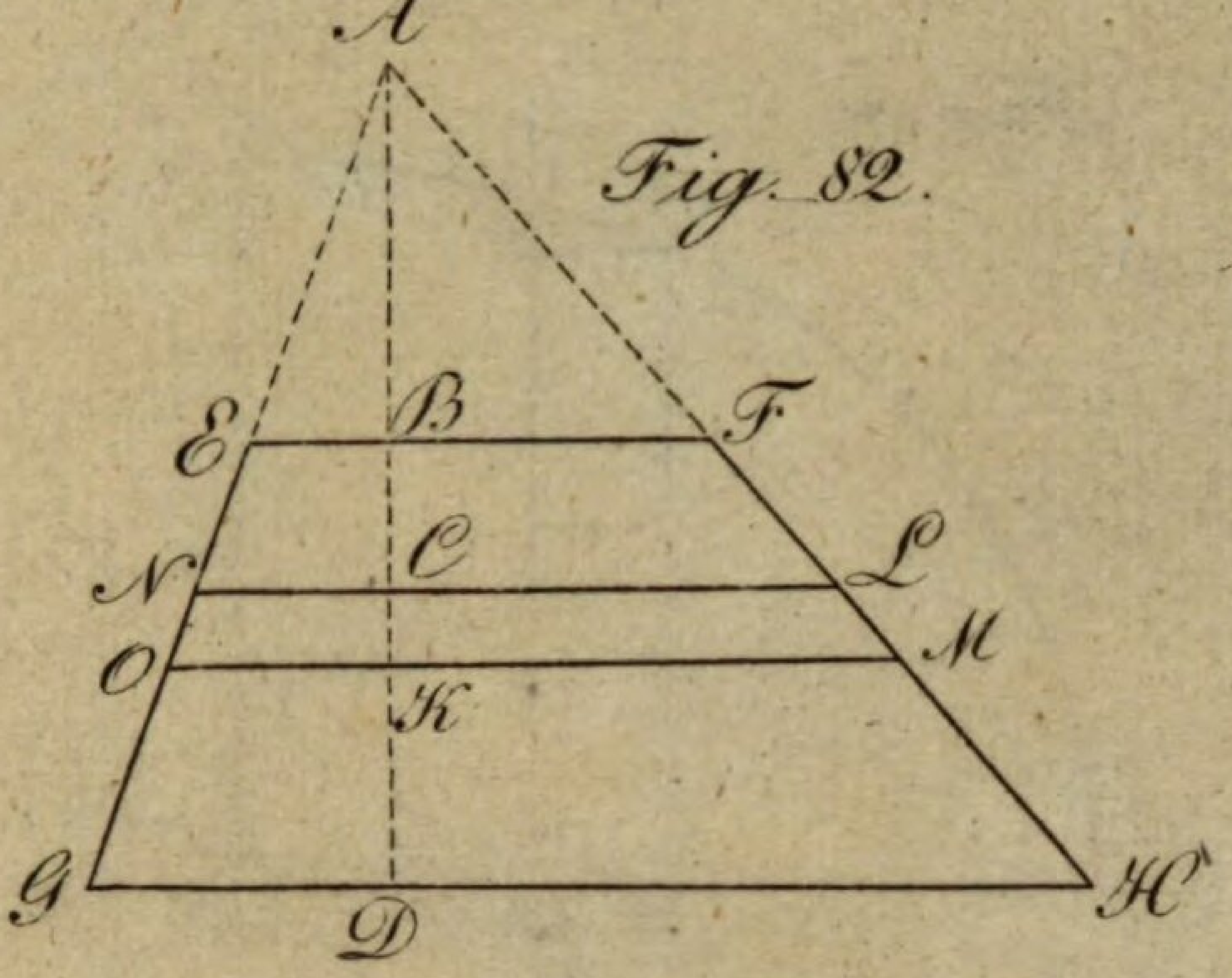


Fig. 82.

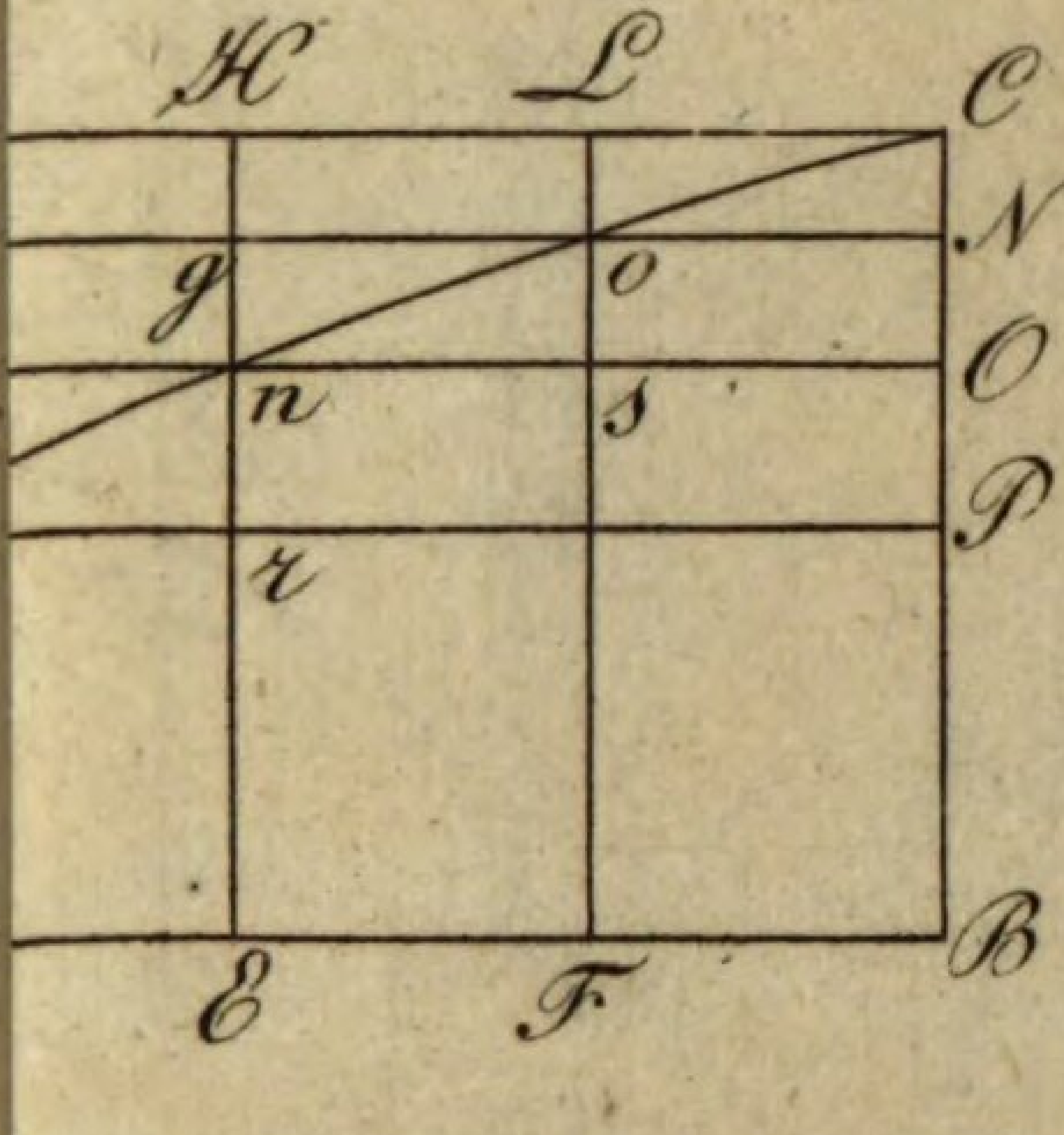


Fig. 84.

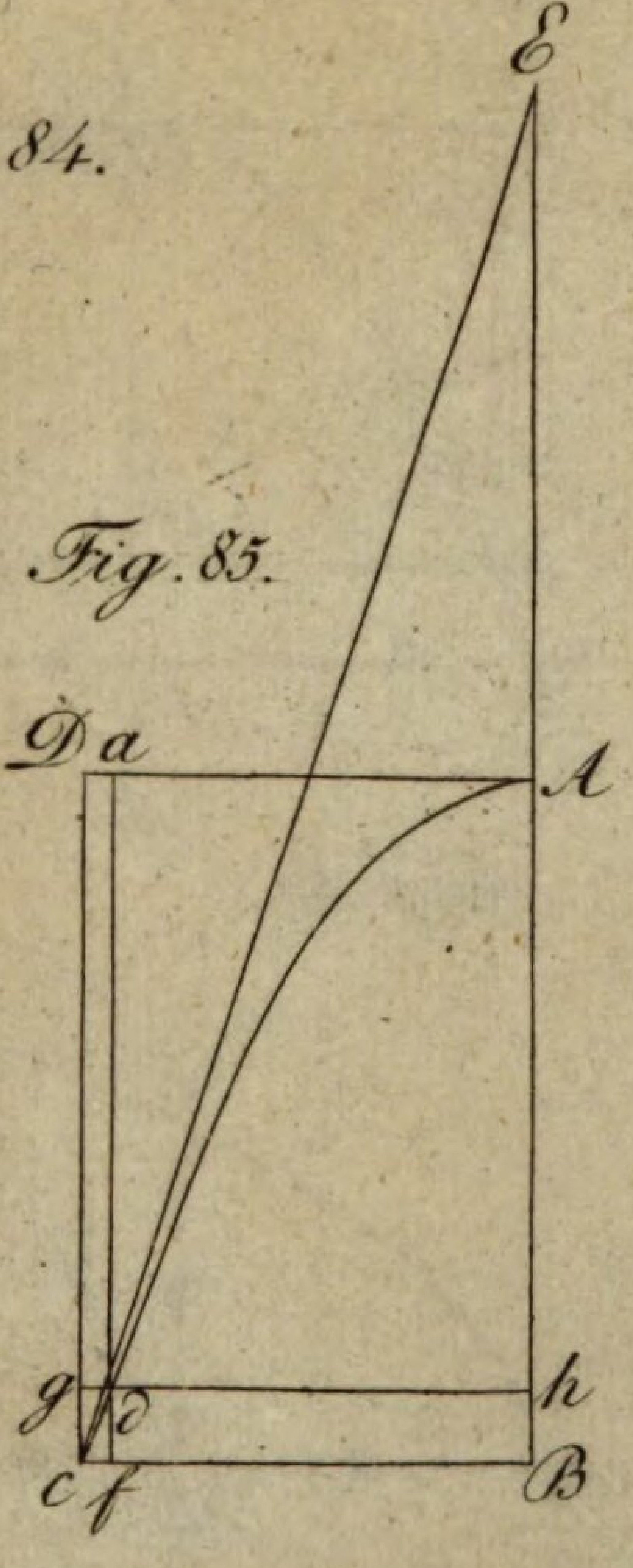


Fig. 85.

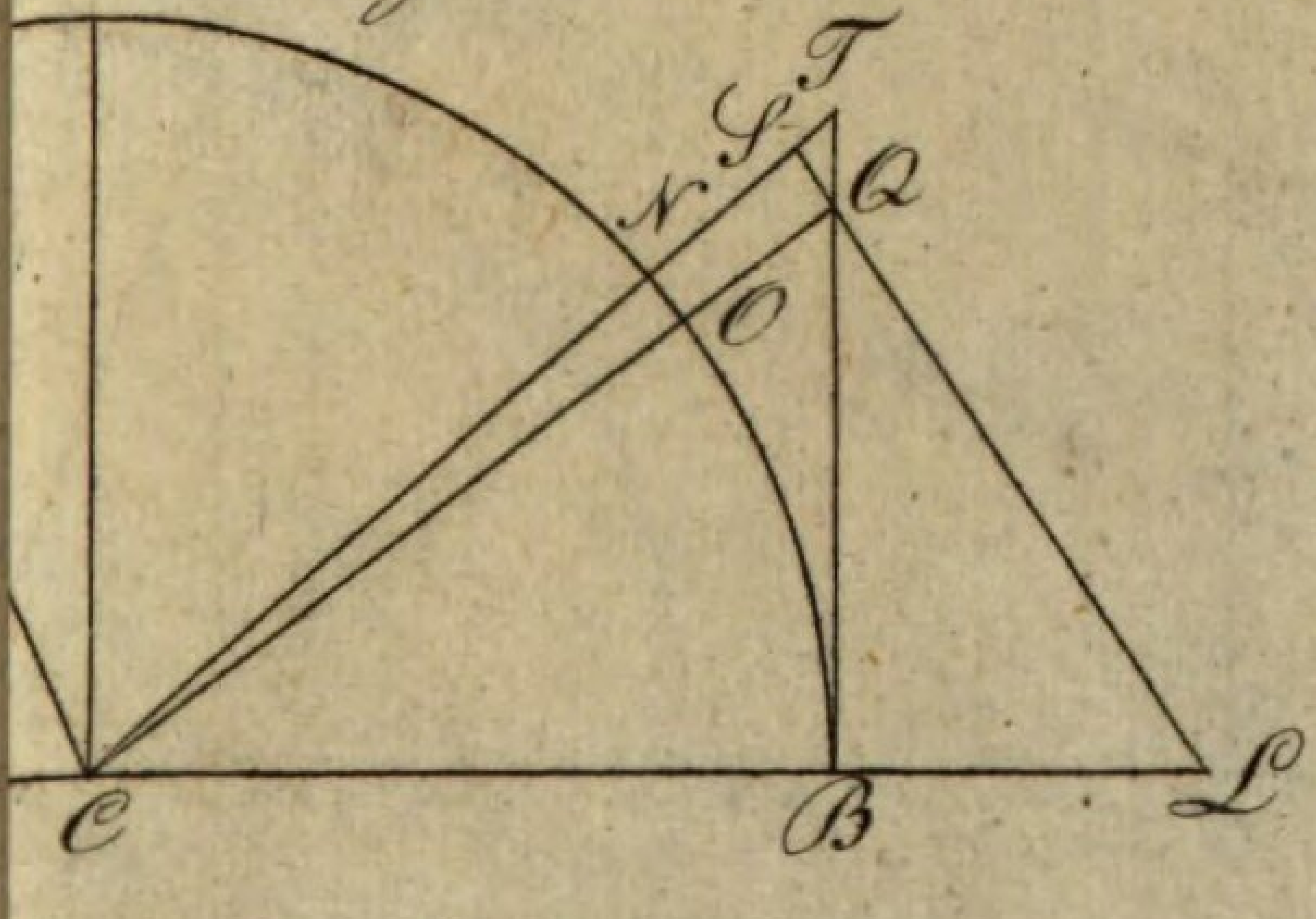
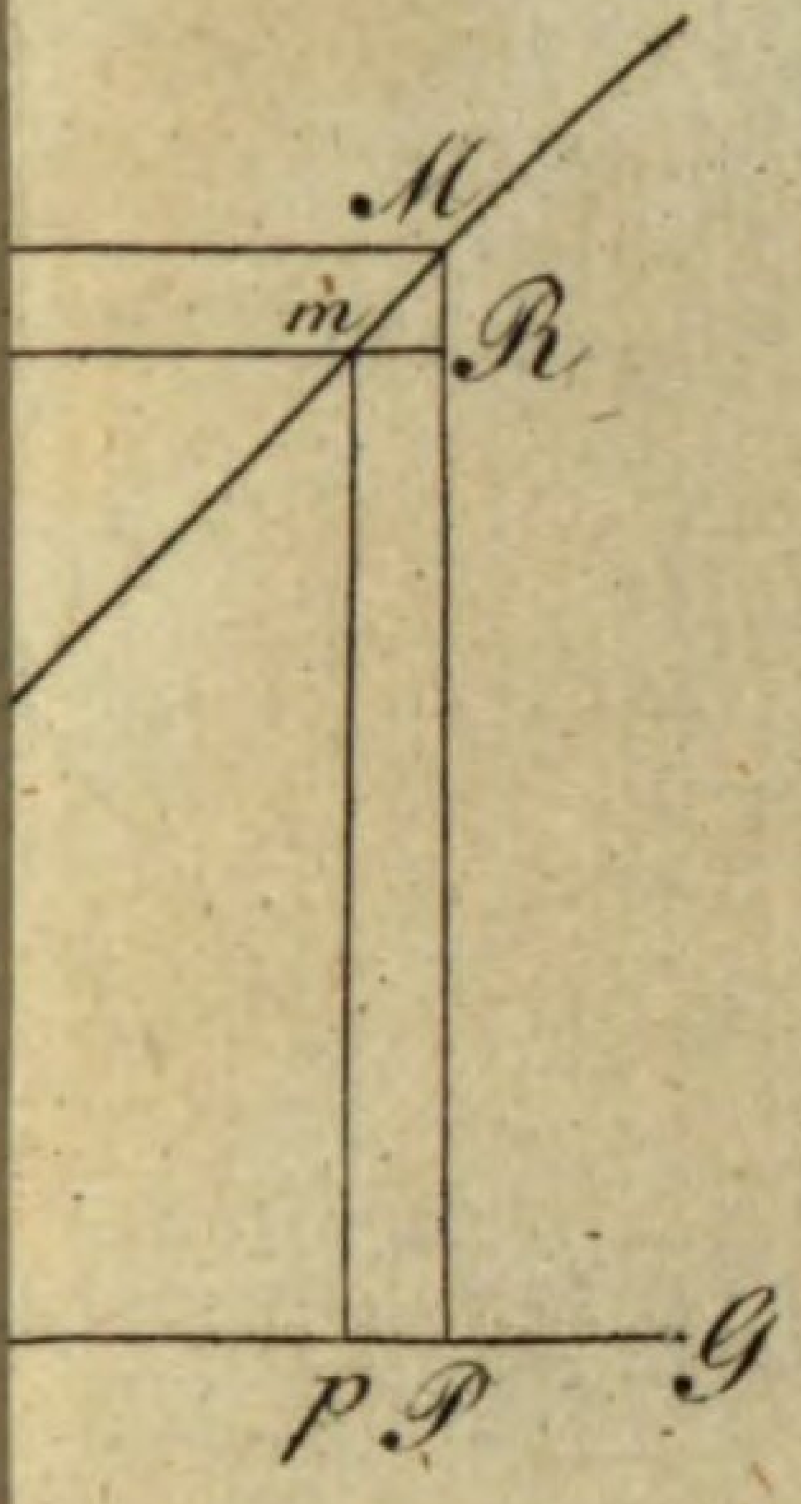


Fig. 87.



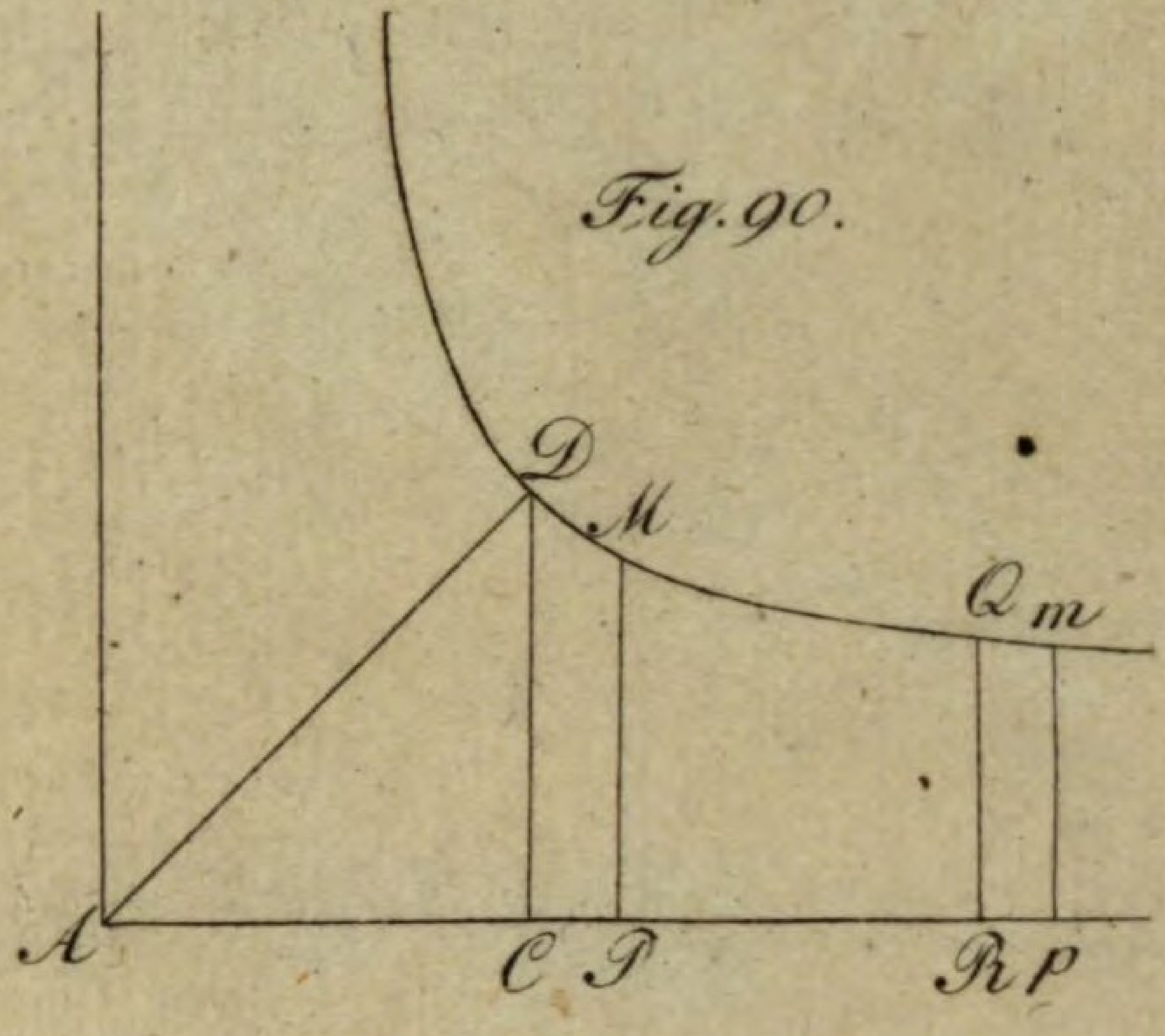
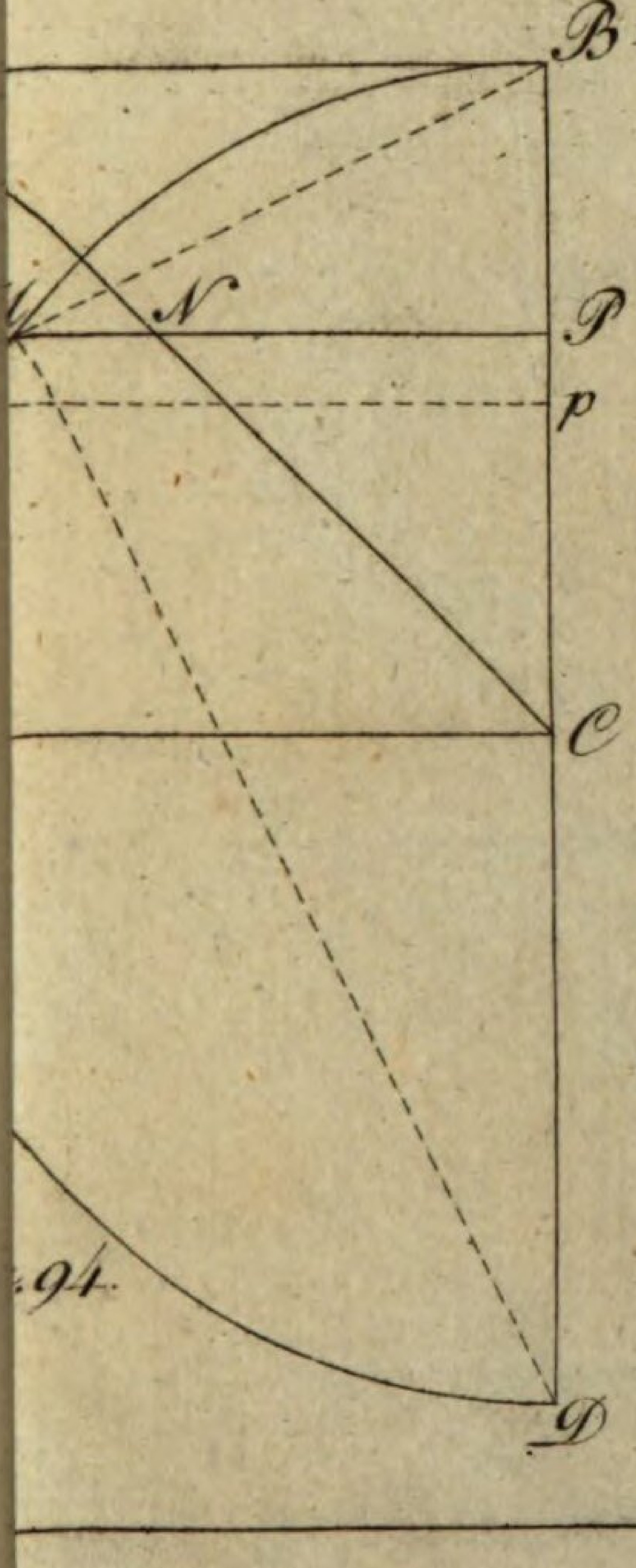


Fig. 90.



.94.

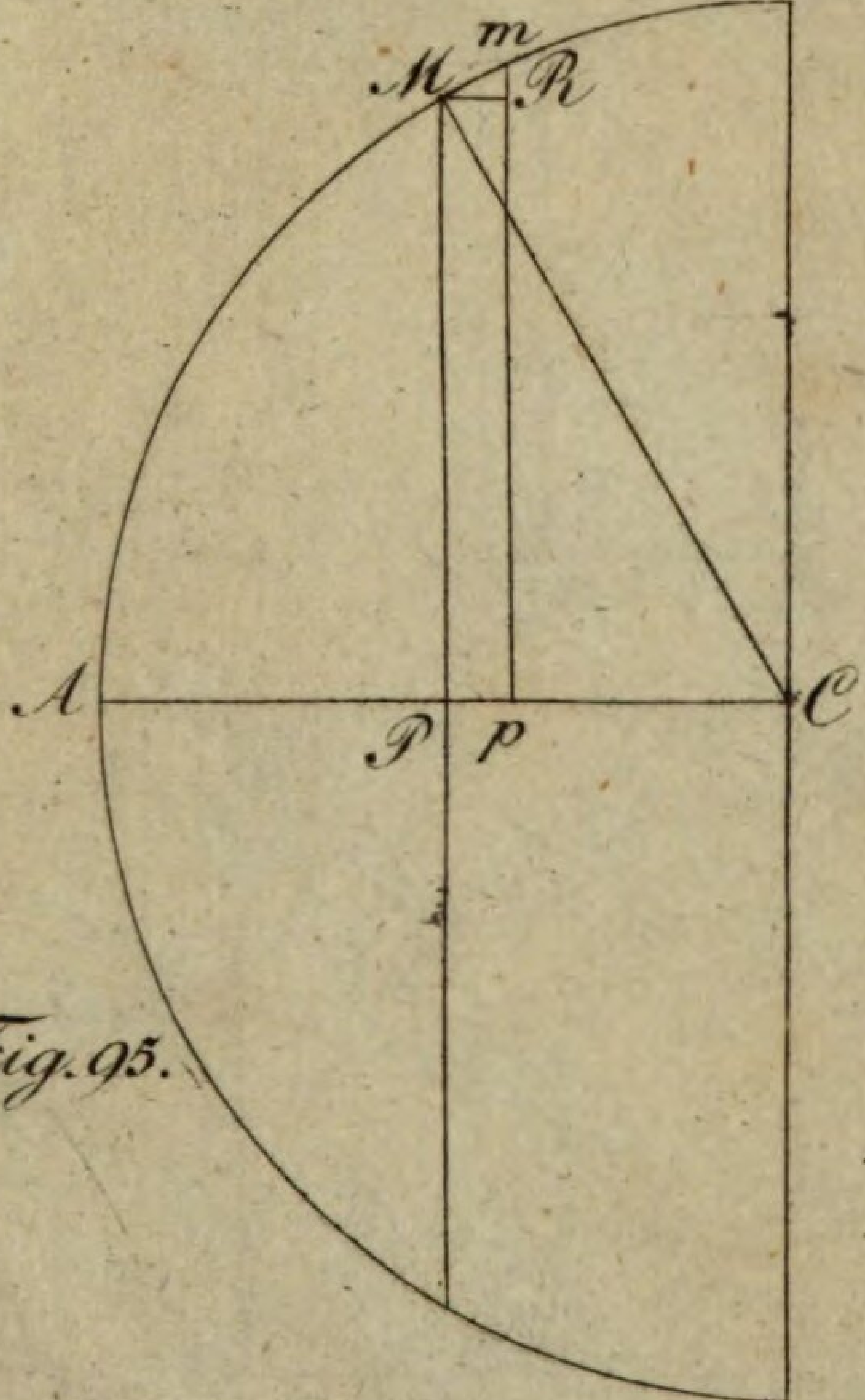


Fig. 95.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Grundlehren der Algebra, höhern Geometrie und Infinitesimalrechnung

Giessen 1817

Bibl.Mont. 3647
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723350-9